IECS 1988 Option générale et économique Maths II

1. La probabilité que Monsieur X soit absent à son travail est égale à α $(0 < \alpha < 1)$. Les absences de Monsieur X ont pour cause soit la maladie, avec une probabilité β $(0 < \beta < 1)$ soit une autre raison avec une probabilité γ $(0 < \gamma < 1)$.

   (a) Lorsque c'est possible, calculer en fonction de α, β et γ la probabilité de l'évènement
   $$\{\text{Monsieur X est malade}\}.$$

   (b) Sachant qu'un jour donné Monsieur X est absent, calculer en fonction de α, β et γ la probabilité qu'il soit malade.

   (c) Quelle est la signification de l'égalité $\alpha = \beta$?

2. Soit un lot de 400 vis dont les unités se répartissent en fonction de leur diamètre, noté X, suivant les données du tableau suivant :

Classes de diamètre en mm	effectifs
[3;3,05[	3
[3,05;3,10[	6
[3,10;3,15[	13
[3,15;3,20[	23
[3,20;3,25[	39
[3,25;3,30[	78
[3,30;3,35[	91
[3,35;3,40[	72
[3,40;3,45[	42
[3,45;3,50[	17
[3,50;3,55[	9
[3,55;3,60[	5
[3,60;3,65[	2
TOTAL	400

   (a) Construire l'histogramme de la distribution de X.

   (b) Calculer la moyenne et l'écart-type de la variable X.
   Les calculs seront présentés sous forme de tableau et les résultats arrondis à 0,01 près

   (c) On suppose que la variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(3,32;0,10)$.
   On veut répartir la production sur cinq types de vis. Le type n° 1 est défini par la condition $X \leqslant \alpha_1$, et pour $i = 1,2,3,4$ le type n° i est défini par la condition $\alpha_{i-1} < X \leqslant \alpha_i$.
   Les α_i sont choisis de la manière suivante : le fabricant détermine, à 10^{-3} près par excès, $c > 0$ tel que $P\{X \in [3,32-c, 3,32+c]\} = 0,90$. Il divise alors l'intervalle $[3,32-c; 3,32+c]$ en trois sous-intervalles de même longueur et prend pour valeurs des α_i les extrémités de ces derniers.

   (c_1) Expliciter les cinq types de vis.

   (c_2) Calculer, à une unité près au plus proche, les pourcentages respectifs qui correspondent à la production des différents types.

3. Une société possède deux ordinateurs, un de type A et un autre de type B.
   Le nombre d'incidents annuels de l'ordinateur A est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$, celui de l'ordinateur B est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$ $(\mu > 0)$. Les variables aléatoires X et Y sont supposées indépendantes.

(a) On pose S la variable aléatoire définie par

$$S = X + Y.$$

i. Montrer que $\forall s \in \mathbb{N}, \quad P(S = s) = \sum\limits_{k=0}^{s} P(X = k \text{ et } Y = s - k).$

ii. En déduire que la loi de probabilité de la variable aléatoire S est une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

(b) On veut calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire X sachant que le nombre total d'accidents S vaut s_0, où s_0 est un nombre entier positif donné.
On notera $X/S = s_0$ cette variable aléatoire.

i. Montrer que $\forall k \in \{0, 1, 2, .., n\}, \quad P(X = k/S = s_0) = \dfrac{P(X = k).P(Y = s_0 - k)}{P(S = s_0)}$.

ii. En déduire que la variable aléatoire $X/S = s_0$ suit une loi binômiale $\mathcal{B}(s_0, \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu})$.

(c) On sait que chaque incident de l'ordinateur A coûte à la compagnie 2000 F et que chaque incident de l'ordinateur B coute 2500 F. D'autre part, chaque incident de l'ordinateur A entraine 2 heures de chômage technique du personnel de la société et chaque incident de B, 3 heures de chômage technique.

i. Sachant que le coût dû aux incidents de deux ordinateurs est de 18 500 F/an et que le coût moyen d'heures de chômage technique est de 21 heures/an, calculer les λ et μ.

ii. Sachant qu'une année il y a eu 5 incidents au total :

- Quelle est la probabilité qu'exactement deux incidents proviennent de l'ordinateur A ?
- Calculer le nombre moyen d'heures de chômage technique dûes aux incidents de l'ordinateur A.