IECS 1988 Option technologique Math I

EXERCICE

Soit A une matrice carrée d'ordre p ($p \in \mathbb{N}^{\times}$) à coefficients réels. On pose $A^0 = I$.
On suppose que : $A^3 + A^2 - A - I = 0$ (I désigne la matrice identité d'ordre p, et 0 la matrice nulle de même ordre)

1. Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1} en fonction de I, A et A^2.

2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3, \quad A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$ avec $\begin{cases} \alpha_{n+1} = -\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = \alpha_n + \gamma_n \\ \gamma_{n+1} = \alpha_n \end{cases}$

3. (a) Déterminer B, matrice carrée d'ordre 3 à coefficients entiers, telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$
   (b) Calculer B^2, B^3, B^4, B^5 et B^6.

4. Pour $r \in \mathbb{N}$, déterminer B^r en fonction de r .
(On distinguera les cas r pair égal à $2n$, et r impair égal à $2n+1$ et on examinera les coefficients situés aux mêmes places)

5. (a) Exprimer $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ en fonction de B, n et $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$.
   (b) En déduire A^r ($r \in \mathbb{N}$) en fonction de r, I, A et A^2. (On distinfuera les cas r pair et r impair).

6. Montrer, en changeant r en $-r$ dans la formule précédente, que le résultat obtenu vaut pour $r \in \mathbb{Z}$. (On distinguera les cas r pair et r impair et on utilisera les expressions de A^4 et A^3 en fonction de A^2, A et I).

PROBLEME

Les deuxième et troisième parties de ce problème sont indépendantes entre elles, mais utilisent les résultats de la première partie.

Première partie

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que

   (a) $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.
   (b) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}$.
   (c) $C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^2 + \cdots + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$.

2. On dispose de morceaux de papier identiques au toucher. Sur chacun d'eux est inscrit un ensemble de nombres entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et n, de manière à ce que les ensembles de nombres inscrits soient tous distincts et que toutes les possibilités d'ensembles soient représentées, y compris un morceau de papier sans inscription.
   On place ces morceaux de papier dans une urne $\mathcal{U}$ et on effectue un tirage au hasard d'un tel morceau, de manière équiprobable. On note X le nombre d'entiers inscrits sur le morceau tiré.
   (a) Vérifier que X suit une loi binômiale dont on déterminera les paramètres.
   (b) A l'aide du 1), calculer en fonction de n : $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Deuxième partie

1. On dispose également d'une urne $\mathcal{V}$ contenant a boules blanches et b boules noires toutes identiques (a et b entiers naturels non nuls). On effectue alors l'expérience suivante : on tire un morceau de papier dans l'urne $\mathcal{U}$. Si le nombre d'entiers inscrit est k, on effectue alors dans $\mathcal{V}$ k tirages d'une boule que l'on remet dans $\mathcal{V}$ après chaque tirage.
   On note Y le nombre de boules blanches obtenues.
   (a) Pour $s \in [\![0, n]\!]$ et $r \in [\![0, n]\!]$, calculer $P(Y = s/X = r)$ en fonction de a, b, r et s.
   (b) Montrer que si $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant n$, $\quad C_n^r C_r^s = C_n^s C_{n-s}^{r-s}$ et en déduire que Y suit une loi binômiale que l'on précisera.
   (c) Exprimer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$ en fonction de n, a et b.
2. On fait varier a, en laissant b fixé, et l'on note alors Y_a la variable aléatoire Y.
   Déterminer, pour $s \in [\![0, n]\!]$, $\quad \lim\limits_{a \to +\infty} P(Y_a = s)$

Troisième partie

On suppose dans cette partie que $n = a + b$. On effectue l'expérience suivante : on tire un morceau de papier dans l'urne $\mathcal{U}$; si le nombre d'entiers inscrits est k, on effectue un tirage simultané de k boules dans $\mathcal{V}$. On note Z le nombre de boules blanches obtenues.

1. (a) Pour $s \in [\![0, a]\!]$ et $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer $P(Z = s/X = k)$ en fonction de a, b, s et k.
   (b) Montrer que Z suit une loi analogue à celle de X.
   (c) En déduire $E(Z)$, $V(Z)$ et $\sigma(Z)$.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Z).
3. Calculer la covariance du couple (X, Z) ainsi que le coefficient de corrélation $\rho(X, Z)$ de ce couple.