IECS 1990 Option générale

Problème

Les quatre premières question de la partie II sont indépendantes de la partie I

Partie I

On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ définie par :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 2x^3 + 6x^2 - 2 \\ P_n(x) &= 2x^3 + (6 + \frac{3}{n})x^2 + \frac{x}{n^2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \quad \text{pour } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

1. Montrer ue P_0 est une bijection de l'intervalle $[0, 1]$ sur l'intervalle $[-2, 6]$. On note Q sa réciproque.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a une unique racine dans l'intervalle $[0, 1[$. On note x_n cette racine.
3. Calculer x_0 à 10^{-2} près.
4. Montrer que la suite $(P_0(x_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini. En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ quand n tend vers l'infini? (on pourra considérer la suite de terme $Q(P_0(x_n))$.)
5. On considère les polynômes R_n de $\mathbb{R}[x]$ définies par $R_n(x) = n^3 P_n(\frac{x}{n}), \quad n \in \mathbb{N}^\times$.
   (a) Calculer $R_n(x)$.
   (b) Montrer que R_n admet une unique racine dans l'intervalle $[0, n]$. On note t_n cette racine.
   (c) Que peut-on dire du signe de R_n sur $[0, t_n]$ et sur $[t_n, n]$?
   (d) Donner à l'aide de x_0 un équivalent de t_n quand n tend vers l'infini.

Partie II

On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geqslant 2$).
On suppose qu'après chaque tirage, on remet dans l'urne la boule tirée.
On suppose aussi que l'on a équiprobabilité de tirer chaque boule.
Un joueur A et un joueur B jouent selon la règle suivante :

- chaque joueur tire une boule et éventuellement une deuxième de façon à réaliser un total le plus proche possible de n sans le dépasser. Le total correspondt au numéro de la boule tirée si le joueur n'a tiré qu'une boule, ou à la somme des numéros des 2 boules tirées dans le cas contraire.
- le joueur A tire en premier,
- si le total du joueur A est inférieur ou égal à n, le joueur B gagne si son total est strictement supérieur à celui de A tout en étant inférieur ou égal à n.
- Dans tous les autres cas, le joueur A gagne.

B n'effectue pas de deuxième tirage s'il est en position gagnate dès son premier tirage.
Le but est de déterminer la meilleure stratégie pour le joueur A.
On modélise ce jeu par quatre variables aléatoires X_1, X_2, Y_1, Y_2, indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\{1, 2, .., n\}$.

X_1 correspond au résultat du 1er tirage du joueur A.
X_2 correspond au résultat du 2ème tirage éventuel du joueur A
Y_1 correspond au résultat du 1er tirage du joueur B
Y_2 correspond au résultat du 2ème tirage éventuel du joueur B

Dans toute la suite, x désigne un entier de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$

1. Calculer $P\left([Y_1 + Y_2 > x \text{ et } Y_1 + Y_2 \leqslant n] \text{ et } Y_1 = k\right)$ pour $k \in \{1, .., x\}$.
   En déduire que $P\left([Y_1 + Y_2 \leqslant x \text{ ou } Y_1 + Y_2 > n] \text{ et } Y_1 = k\right) = \dfrac{x}{n^2}$.
2. Calculer $P\left([Y_1 + Y_2 \leqslant x \text{ et } Y_1 + Y_2 > n] \text{ et } Y_1 \leqslant x\right)$. En déduire que dans le cas où le joueur A ne tire qu'une boule, la probabilité qu'il gagne sachant que $X_1 = x$ est $\dfrac{x^2}{n^2}$. On note $P_1(x)$ cette probabilité.
3. Dans le cas où le joueur A tire une deuxième boule, montrer que la probabilité qu'il gagne sachant que $X_1 = x$ est $\dfrac{1}{n^3} \sum\limits_{y=x+1}^{n} y^2$.

   (Par convention, la simme $\sum\limits_{k=a}^{b}$ est nulle si $a > b$).
   On note $P_2(x)$ cette probabilité.
4. Montrer que $P_1(x) \leqslant P_2(x) \Leftrightarrow 2x^3 + (6n + 3)x^2 + x - n(n + 1)(2n + 1) \leqslant 0$.
   (On rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{p} k^2 = \dfrac{p(p + 1)(2p + 1)}{6}$).
5. Montrer qu'il existe un entier $A_n \in \{1, ..., n\}$ tel que
   $$P_1(x) \leqslant P_2(x) \Leftrightarrow x \in \{1, .., A_n\}$$
   Déterminer A_{30}.
6. Montrer que A_n est équivalent à nx_0 quand n tend vers l'infini (x_0 est défini dans la partie **I**).

EXERCICE

Soit u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $u^3 - 6u^2 + 11u - 6\,\mathrm{Id} = 0$, où Id est l'application identique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que les seules valeurs propres possibles de u sont $1, 2$ ou 3. En déduire que u est diagonalisable, et trouver une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $u(e_i) = ie_i$, $i = 1, 2, 3$.
3. Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de $\mathbb{R}^3$ tel que $(x_0, u(x_0), u^2(x_0))$ engendre $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), \quad v \circ u = u \circ v\}$. Montrer que $C(u)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
5. Soit x_0 un vecteur tel que $(x_0, u(x_0), u^2(x_0))$ engendre $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire
   $$f : \left\{ \begin{array}{lcl} C(u) & \to & \mathbb{R}^3 \\ v & \mapsto & v(x_0) \end{array} \right.$$
   Montrer que f est injective.

6. Pour $i = 1, 2, 3$, on considère l'endomorphisme u_i de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} u_i(e_i) = ie_i \\ u_i(e_j) = 0 \text{ si } j \neq i \text{ et } j = 1, 2 \text{ ou } 3 \end{cases}$$

Montrer que tout élément v de $C(u)$ peut s'exprimer, d'une manière unique, comme combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3.