IECS 1991 Option générale

EXERCICE I

Une urne contient 10 boules dont une blanche. On effectue dans cette urne une suite de tirage d'une boule avec remise de la boule dans l'urne après chaque tirage.
Pour k entier naturel non nul, on note U_k la variable indicatrice de l'évènement A_k : "la $k^{ième}$ boule tirée est blanche".
Pour n entier naturel non nul, on pose :

$$X = \sum_{k=1}^{n} U_k \quad \text{et} \quad Y_n = U_n + U_{n+1}.$$

1. (a) Donner les lois des variables U_k et X_n.
   (b) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X_n si n est égal à 100 ?
2. (a) Donner la loi de la variable Y_n. Calculer $E(Y_n)$ son espérance et $V(Y_n)$ sa variance.
   (b) On pose pour n entier naturel non nul : $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
   Calculer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$ l'espérance et la variance de la variable Z_n.
   Montrer que :
   $$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^\times, \quad P\left(\left|Z_n - \frac{1}{5}\right| \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{9(2n-1)}{50n^2\alpha^2}$$
   En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\left|Z_n - \dfrac{1}{5}\right| < \alpha\right)$.

EXERCICE II

Question 1. Soit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$I_0 = \int_0^1 \sin \pi x dx \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x dx$$

1. Calculer I_0 et I_1
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   Que peut-on en déduire pour la suite (I_n) ?
3. Montrer à l'aide de deux intégrations par parties que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)}(1 - \pi I_{n+2}).$$
4. Montrer que la série de terme général I_n est convergente.

Question 2. Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$u \mapsto S_n(u) = \int_0^u \sum_{k=0}^{n} f_k(x) dx.$$

1. Montrer
   (a) que S_n est continue sur $[0,1]$.
   (b) que $\forall u \in [0,1[, \quad S_n(u) = \int_0^u \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \sin \pi x dx.$

2. (a) Montrer que la fonction définie sur $[0,1[$ par $x \mapsto \frac{\sin \pi x}{1-x}$ est prolongeable par continuité en $x=1$.
   (b) En déduire
      i. l'existence de $K_0 = \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1-x} dx$.
      ii. l'existence pour n entier naturel non nul de $K_n = \int_0^1 x^n \frac{\sin \pi x}{1-x} dx$.
      iii. l'existence d'un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{M}{n+1}$.

3. (a) Montrer que $S_n(1) = K_0 - K_{n+1}$.
   (b) Retrouver ainsi la convergence de la série de terme général I_n et en déduire que si S est sa somme

$$S = K_0 = \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du.$$

EXERCICE III

Partie A

$\mathbb{R}_p[x]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à p et du polynôme nul.
$B = (X^0, X, .., X^p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$.
On considère pour a réel donné l'endomorphisme θ_a de $\mathbb{R}_p[X]$ défini par

$$\forall k \in [\![0,p]\!], \quad \theta_a(X^k) = (1+X)^k - \frac{a}{2} X^k.$$

Question 1. 1. Ecrire la matrice de θ_a dans la base B.
2. Quelles sont les valeurs propres de θ_a ? θ_a est-il diagonalisable ?

Question 2. On suppose dans cette question que a est égal à 1.

1. Montrer que θ_1 est bijectif.
2. Pour p égal à 3, on note A la matrice de θ_1 dans la base B de $\mathbb{R}_3[X]$.
   Calculer A^{-1}, son inverse, par la méthode du pivot de Gauss.
   En déduire V le polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ image réciproque du polynôme

$$F = 1 + 5X + 6X^2 + X^3.$$

Partie B

f est une application donnée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \text{ réel donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + f(n) \end{cases} \qquad (1)$$

Question 1. Si u et v sont deux suites réelles satisfaisant à la condition (1), on pose $w = u - v$. Exprimer w_n le terme général de la suite w en fonction de n, u_0 et v_0.

Question 2. On suppose dans cette question que f est la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction polynôme F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{p} b_k x^k \quad (b_k \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in [\![0, p]\!])$$

Montrer l'existence et l'unicité d'une suite réelle v de terme général

$$v_n = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k n^k$$

satisfaisant à la condition (1), où $(\alpha_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ élément de $\mathbb{R}^{p+1}$ est solution d'un système que l'on déterminera.
Application. Pour $p = 3$ et $f : n \mapsto 1 + 5n + 6n^2 + n^3$, déterminer la suite v et en déduire la suite u satisfaisant à la relation (1) de terme initial u_0 égal à 3.

Partie C

On note

- E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$.
- Φ l'application de E dans E définie par : $t \mapsto \Phi(t) = u$ où u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = t_0; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + t_{n+1}$$

Question 1. Montrer que Φ est un automorphisme de E.

Question 2. 1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{t_k}{2^{n-k}}$.
Montrer que si la suite t est bornée, la suite $u = \Phi(t)$ est bornée.

2. Si la suite t est une suite constante de terme général $t_k = L$, donner l'expression de u_n en fonction de n et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Question 3. 1. On suppose la suite t convergente de limite 0. Montrer que pour tout réel non nul α :

(a) il existe un entier n_0, tel que pour tout entier n supérieur à n_0 :

$$|u_n| \leqslant \frac{\alpha}{2} + 2^{-n} \sum_{k=0}^{n_0} 2^k |t_k| .$$

(b) Il existe un entier naturel n_1, tel que pour tout entier n supérieur à n_1 :

$$2^{-n} \sum_{k=0}^{n_0} 2^k |t_k| \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

En déduire que si t est convergente de limite nulle, alors $u = \Phi(t)$ est convergente de limite nulle.

2. On suppose que la suite t convergente de limite L.

(a) Quelle est la limite de la suite $x = \Phi(t - L)$.

(b) En déduire que la suite $u = \Phi(t)$ est convergente de limite $2L$.