INSEEC

MATHEMATIQUES

option scientifique

Année 1991

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

Deux personnes A et B jouent à un jeu de hasard. A chaque coup, celui qui perd donne 1 franc à l'autre (les capitaux de A et B sont supposés illimités). Malheureusement pour A le jeu n'est pas équitable et à chaque coup, la probabilité de gain de A est $p = 0,45$.
Après qu'ils aient joué n fois, on note X la variable aléatoire "nombre de succès de A" et Y la variable aléatoire "gain de A"

1. Quelle est la loi de X ? Valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.
   Même question pour Y.
2. En prenant $n = 100$ estimer la probabilité pour que A ait un gain :
   (a) positif ou nul,
   (b) supérieur ou égal à 7 francs.
3. Estimer une valeur n_0 telle que si $n > n_{0,}$ la probabilité pour que A ait un gain strictement positif, soit inférieure à 0,05.

Extrait de la tablea de la fonction $\Pi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Insérer la table

EXERCICE II

On considère $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_n[x]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[x]$ des polynômes de degré au plus égal à n.

1. Montrer que l'ensemble des polynômes p_k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ définis par : pour tout x de $\mathbb{R}$, $\quad p_k(x) = x^k$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ que l'on notera B.
   Montrer que l'ensembles des polynômes P_k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ définis par : pour tout x de $\mathbb{R}$, $\quad P_k(x) = x^k(1-x)^{n-k}$ est une base B' de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Dans le cas $n = 2$ puis dans le cas $n = 3$, écrire les matrices de changement de base Q de la base B à la base B' et Q^{-1} de la base B' à la base B.
3. A tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$, on associe le polynôme $T(P)$ de $\mathbb{R}[x]$ défini par :

$$T(P) = \sum_{k=0}^{3} P(\frac{k}{3}) C_3^k x^k (1-x)^{3-k}.$$

(a) Expliciter $T(P)$ dans les cas $P(X) = p_0(x)$ et $P(X) = p_1(x)$.

(b) Si $P_1(x) = xP(x)$, montrer que : $T(P) = \dfrac{x(1-x)}{3}.\dfrac{dT(P)}{dx} + xT(P)$.
Déterminer alors $T(P)$ dans les cas suivants : $P(x) = p_2(x)$ et $P(x) = p_3(x)$.

4. Montrer que T est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
On considère la restriction de T à $\mathbb{R}_n[x]$ notée T_n.
Montrer que si $n \leqslant 3$, T_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$
et si $n > 3$ T_n est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_3[x]$
Ecrire la matrice de T_3 dans la base B, puis dans la base B'.

PROBLEME

I - On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln|1+x|}{x}$ si x est différent de 0 et de -1 et $f(0) = 1$.

1° Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

2° Etudier le comportement de f aux bornes de son ensemble de définition et déterminer les équations des asymptotes éventuelles.

3° Etude des variations de f.

a) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par : $h(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln|1+x|$.
Après avoir étudié les variations de h, montrer qu'elle possède une seule valeur non nulle α telle que $h(\alpha) = 0$.
Encadrer α par deux valeurs décimales différent entre elle de $0,1$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (c'est-à-dire qu'elle est dérivable et de dérivée continue sur $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$).

c) Etudier les variations de f. Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé direct (1 unité = 1 cm).
Préciser la tangente du graphe de f en $x = 0$ et $x = 2$.

II - 1° Déduire des résultats précédents les variations et le graphe (G) de la fonction g définie par

$$\begin{cases} g(x) = |1+x|^{1/x} & \text{pour } x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\} \\ g(0) = e \end{cases}$$

(On tracera le graphe de g dans un repère orthonormé direct différent de celui de f mais de même unité).

2° Démontrer que les suites u et v définies par

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad u_n = (1+\frac{1}{n})^n \quad \text{et} \quad v_n = (1-\frac{1}{n})^{-n} \text{ sont adjacentes.}$$

Quelle est leur limite commune ?

3° Etablir la double inégalité $(1+\dfrac{1}{n})^n < e < (1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$.
Calculer l'encadrement de e obtenu pour : $n = 10$ puis $n = 100$.
Que pensez vous de la précision obtenue ?

III - 1° En ne considérant que les valeurs de x dans l'intervalle $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$, tracer dans un repère orthonormé direct (unité = 4 cm) les graphes des fonctions $x \mapsto 1-x$, $x \mapsto x$, $x \mapsto g(x)$.
Que constatez-vous ?

2° Démontrer que pour tout $x \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$, $x - x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

3° En utilisant **III -2°**, déterminer la limite de $A(n)$, quand n croit indéfiniment, de

$$A(n) = (1 + \frac{1}{n^2}).(1 + \frac{2}{n^2}).(1 + \frac{3}{n^2})....(1 + \frac{n}{n^2}).$$

4° En utilisant **III -2°**, déterminer la limite de $B(n)$, quand n croit indéfiniment, de :

$$B(n) = (1 + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n^3}}).(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^3}}).(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n^3}})....(1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}).$$

5° On se propose de chercher la limite, lorsque n croit indéfiniment, de

$$C(n) = \cos^2 \frac{1}{\sqrt{n+1}}.\cos^2 \frac{1}{\sqrt{n+2}}.\cos^2 \frac{1}{\sqrt{n+2}}....\cos^2 \frac{1}{\sqrt{n+n}}.$$

a) En étudiant les variations des fonctions

$$\varphi_1(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$$

sur $\mathbb{R}_+^\times$, démontrer

$$\text{pour tout } x > 0, \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^{24}}{24},$$

puis en posant : $x = \cos 2\theta$, montrer que pour tout $\theta \neq 0$:

$$\theta^2 - \theta^4 < \sin^2 \theta < \theta^2 \quad \text{et} \quad \sin^4 \theta < \theta^4.$$

b) Encadrer la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^p}$, $p \in \mathbb{N}^\times$ fixé, par deux intégrales de la forme $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^p}$ avec a et b dépendants de n.

c) En remarquant que : $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$, et en utilisant 5°a) et 2° du III-, trouver un encadrement de $C(n)$. En déduire la limite de $C(n)$ quand n tend vers l'infini.