INSEEC

# MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option technologique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

---

## Exercice 1

On considère la matrice $A$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $A^2$.
2. Dans cette question, $n$ désigne un entier naturel non nul.
   (a) Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}.$$
   On exprimera $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et on vérifiera que $a_{n+1} = -2a_n + 3$.
   (b) Calculer $A^n$ en fonction de $n$.
   (c) Ecrire les 9 termes de la matrice $A^n$.

## Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x^2e^x$. $(C)$ la courbe représentative de $f$.

1. (a) Déterminer le sens de variation de $f$.
   (b) Dresser le tableau de variation de $f$.
   (c) donner l'allure de $(C)$.
2. (a) Déterminer 3 réels $a, b$ et $c$ tels que la fonction $G$ définie par $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ soit une primitive de la fonction $g$ définie par $g(x) = x^2e^x$.
   (b) En déduire l'aire de la surface limitée par $(C)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -2$.
3. Pour $n$ entier naturel, on désigne par $f^{(n)}$ la dérivée $n^{ième}$ de $f$.
   (a) Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $f^{(n)}(x) = (-x^2 + a_nx + b_n)e^x$.
   *On exprimera* $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ *en fonction* de $a_n$ et $b_n$.
   (b) Calculer $a_n$ et $b_n$ en fonction de n.

## Exercice 3

Les **parties A** et **B** sont indépendantes

### Partie A

Une agence de voyage propose deux formules à sa clientèle : une formule hôtel comprenant transport et hébergement, et une formule club comprenant transport, hébergement, circuit et animation. Une étude montre que 30% des clients choisissent la formule hôtel et 70% la formule club. D d'autre part, parmi les clients ayant choisi la formule hôtel, 80% effectuent leur voyage en France et 20% à l'étranger Enfin, parmi ceux ayant choisi la formule club, 40% effectuent leur voyage en, France et 60% à l'étranger:

1. Un client se présente à l'agence.
   (a) Calculer la probabilité qu'il choisisse un voyage à l'étranger
   (b) Le client demande un voyage à l'étranger calculer la probabilité qu'il prenne la formule club.
2. 10 clients se présentent à l'agence.
   Soit $T$ le nombre de clients faisant un voyage à l'étrange,
   (a) Déterminer la loi de $T$
   (b) Calculer l'espérance $E(T)$.

### Partie B

Le forfait d'un voyage, en milliers de francs, versé à l'agence par un client définit une variable aléatoire $Y$. Des études antérieures ont permis d'établir que : $M = 2 + 0,5X$ où $X$ est une variable aléatoire de fonction de répartition définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ F(x) = 1 - \dfrac{x+6}{6} e^{-\frac{x}{6}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Calculer la probabilité pour que le forfait ne dépasse pas 8000 Francs.
2. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $X$.
3. (a) Calculer l'espérance de $X$.
   (b) En déduire le montant moyen du forfait.
4. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y$.