INSEEC
MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se propose d'étudier l'existence et les propriétés des polynômes $P_n(X)$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad P_n\left(t + \frac{1}{t}\right) = t^n + \frac{1}{t^n} \qquad \text{(relation 1)}$$

1. (a) Montrer que si P_n existe alors P_n est unique.
   (b) Justifier que $P_0(X) = 2$, que $P_1(X) = X$ et , en développant $(t + \frac{1}{t})^2$, calculer $P_2(X)$ vérifiant la relation (relation 1).
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in N$, P_n existe et
$$P_{n+2}(X) = X\,P_{n+1}(X) - P_n(X). \qquad \text{(relation 2)}$$
3. Déterminer le degré de P_n, son terme de plus haut degré et sa parité.
4. (a) Soit $\theta \in R$. Déterminer un complexe non nul t , $t \in \mathbb{C} - \{0\}$, tel que $t + \dfrac{1}{t} = 2\cos(\theta)$ puis calculer $P_n(2\cos(\theta))$ en fonction de n et θ.
   (b) En déduire les racines de P_n en fonction de n et une factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $t^n + \dfrac{1}{t^n} = 0$ et retrouver ainsi le résultat précédent.
5. (a) Calculer $P_5(X)$.
   (b) En déduire une factorisation de $P_5(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   (c) En comparant cette factorisation et celle obtenue en 4.b) donner les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{10}\right)$.

Exercice 2

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
Le produit scalaire utilisé dans cet exercice est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.

1. Justifier que M est diagonalisable.
2. Calculer les valeurs propres de M et les sous espaces propres associés.

3. Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de M et en déduire une matrice P telle que ${}^tP\,M\,P$ soit diagonale (${}^tP$ désigne la transposée de P).

4. On pose $F = Vect\left((1,-2,1)\right)$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(1,-2,1)$ et $G = Vect\left((1,0,-1),(1,1,1)\right)$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,0,-1)$ et $(1,1,1)$.

   Soit p le projecteur sur F de direction G et q le projecteur sur G de direction F.

   (a) Justifier que p et q sont des projecteurs orthogonaux et déterminer les endomorphismes $p \circ q$, $q \circ p$ et $p + q$.

   (b) On appelle respectivement A et B les matrices de p et q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Calculer A et B.

5. On pose f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.

   (a) Montrer que $f = 5.p - q$.

   (b) En déduire f^n en fonction de n , p et q puis M^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Exercice 3

On suppose que l'attente d'un quelconque client aux guichets d'une administration suit une loi exponentielle de paramètre λ, que les différents temps d'attente des clients sont tous indépendants les uns des autres.
Soit n un entier , $n \geqslant 3$. On mesure n temps d'attente choisis au hasard.
Notons X_i le temps d'attente du $i^{ième}$client et $M_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ la moyenne arithmétique de ces n temps d'attente.
Pour les besoins de certains calculs nous utiliserons la valeur approchée $\Phi(2) = 0,975$ où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et réduite.

Partie A

1. Justifier que M_n est un estimateur convergent et sans biais de $\dfrac{1}{\lambda}$.

2. (a) Justifier que pour n assez grand la loi de M_n peut-être approchée par une loi normale.

   (b) On suppose dans cette question que $\lambda \geqslant 4$.
   En utilisant cette approximation par une loi normale, évaluer n afin que l'on puisse affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que l'on connaît $\dfrac{1}{\lambda}$ au centième près.

Partie B

On pose $Y_n = \dfrac{1}{M_n}$ et on se propose dans cette partie de voir si Y_n est , ou non , un estimateur convergent de λ.
Appelons f_n et F_n la densité et la fonction de répartition de la loi Gamma$\left(\dfrac{1}{\lambda}, n\right)$.
(On rappelle que si $x > 0$, $f_n(x) = \dfrac{1}{\Gamma(n)}\lambda^n e^{-\lambda x} x^{n-1}$.)

1. (a) Rappeler la loi que suit la variable $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ puis calculer en fonction de f_n une densité de Y_n.

   (b) Montrer que , si $n > 1$, la variable aléatoire Y_n possède une espérance et que l'on a $E(Y_n) = \dfrac{n\lambda}{n-1}$.

   (c) Montrer que , si $n > 2$, la variable aléatoire Y_n possède une variance et que l'on a $V(Y_n) = \dfrac{n^2\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}$.

2.

   (a) Y_n est-il un estimateur convergent de λ ? Est-il avec ou sans biais ?

   (b) Déterminer à l'aide de Y_n un estimateur convergent et sans biais de λ.

Partie C

Dans cette partie on suppose que l'on ne connaît pas la loi du temps d'attente des clients.
Soit p la proportion des clients qui ont un temps d'attente supérieur à 4 .
Déterminer un nombre n à partir duquel on peut affirmer que l'on peut connaître p à $0,04$ près avec au moins 95% de chances ne pas se tromper.