ISC 1987 Option générale

EXERCICE 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites définies par leurs premiers termes respectifs u_0, v_0, w_0 réels et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{c} 3u_{n+1} = 4u_n + 2v_n + w_n \\ 3v_{n+1} = -u_n - v_n - w_n \\ 3w_{n+1} = -2u_n - 2v_n + w_n \end{array} \right.$$

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme associé dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) λ étant un paramètre réel, déterminer par la méthode du pivot de Gauss le noyau de $f - \lambda\,\mathrm{Id}$, où Id désigne l'identité sur $\mathbb{R}^3$. Vérifier qu'il existe trois valeurs de λ pour lesquels ce noyau n'est pas réduit au vecteur nul. On notera ces valeurs λ_1, λ_2, λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

   (b) Soit P la matrice carrée d'ordre 3 définie par :

      i. la première ligne de P est constituée de 1

      ii. pour $j \in \{1, 2, 3\}$, le $j^{ième}$ vecteur colonne de P est constitué d'un vecteur du noyau de $f - \lambda\,\mathrm{Id}$.
      Montrer que P est une matrice inversible et calculer P^{-1}.

   (c) Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer u_n, v_n, w_n en fonction de n et des valeurs initiales u_0, v_0, w_0. Ces trois suites sont-elles convergentes ?

EXERCICE 2

Soit n un nombre entier naturel strictement positif

1. Une urne contient $2n$ boules dont n boules blanches. On tire en une seule fois une poignée de p boules de cette urne (avec $0 \leqslant p \leqslant 2n$) et on note X_p l'aléa numérique égal au nombre de boules blanches obtenues.

   (a) On suppose dans cette question que l'on a : $n = 5$, $p = 7$. Déterminer la loi de X_7, son espérance et sa variance.

   (b) On suppose dans cette question que l'on a : $p = n$. Déterminer la loi de X_n et son espérance.

   (c) Des calculs précédents, déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

   (C_n^k désignant le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments).

2. On dispose d'une urne U_1 contenant au départ N boules blanches et N boules noires (N est supposé très grand) et d'un stock d'accessoire de boules noires et blanches. On dispose également d'une seconde urne U_2 contenant quatre cartons sur lesquels sont écrites les phrases suivantes :

   "$n°1$: ajouté une boule blanche dans U_1"
   "$n°2$: enlever une boule blanche de U_1"
   "$n°3$: ajouter une boule noire dans U_1"
   "$n°4$: enlever une boule noire de U_1"

   L'expérience consiste à choisir au hasard n fois un carton dans U_2 (avec remise et avec $n \leqslant N$) et à effectuer à chaque fois l'instruction obtenue.

(a) Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note Y_i la variable aléatoire valant 1 si le carton obtenu au $i^{ième}$ tirage dans U_2 porte le numéro 1, -1 s'il porte le numéro 2 et 0 sinon. Quelle est la loi de Y_i ?

(b) Calculer l'espérance et la variance du nombre aléatoire de boules blanches contenues dans l'urne U_1 à la fin de l'expérience.

(c) On note I_n l'évènement : "à la fin de l'expérience, le contenu de l'urne U_1 est identique au contenu initial".
Calculer la probabilité de l'évènement I_n.

PROBLEME

I. (1) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,$$

où ln désigne la fonction "logarithme népérien".

a. Quel est le domaine de définition de f ?
b. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et déterminer la fonction f'
c. Construire avec précision la représentation graphique (C) de f en repère orthonormé (l'unité sera prise égale à 4 cm). On indiquera en particulier la concavité et la nature des branches infinies.

(2) Soit $I(a)$ la surface limitée par l'axe des abscisses, la coube (C) et les verticales d'abscisses respectives 0 et a, avec $0 < a < 1$.

a. Calculer $I(a)$.
b. Cette aire a-t-elle une limite lorsque a tend vers 1 par valeurs inférieures ?

(3) Soit g la fonction définie sur $]-1,1[$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{3(1-x^2)}$.
Construire avec précision la représentation graphique (Γ) de g, **dans le même repère que précédemment**

(4) Pour $n \in \mathbb{N}^{\times} = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose

$$u_n = \frac{n^{n+1/2}e^n}{n!} \qquad v_n = u_n e^{1/(12n)}.$$

a. Déduire de ce qui précède, la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$.
b. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$ sont convergentes de même limite.
En notant l cette limite, montrer que l'on a :

$$0,39 < l < 0,4.$$

c. En déduire un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \int\limits_0^1 \dfrac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

(1) Justifier l'existence du nombre J_n et montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(2) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad J_n = \dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$.

(3) Calculer J_1 et en déduire que l'on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad J_{2p+1} = \frac{(2^p.p!)^2}{(2p+1)!}.$$

(4) Montrer que l'expression $(2p+1)J_{2p+1}.J_{2p}$ est indépendante de la valeur de l'entier p.

(5) Déterminer $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{J_{2p+1}}{J_{2p}}$ et en déduire un équivalent simple de J_{2p+1} lorsque p tend vers l'infini.

(6) Déterminer la valeur de l (défini en I4) et en déduire la nature de la série dont le terme général est la probabilité de l'évènement I_n (défini dans l'exercice 2).