ISC 1991 Option générale

EXERCICE 1

On note E l'espace vectoriel réel formé de la fonction nulle et des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel, fixé, avec $n \geqslant 2$.
On considère la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ d'élément de E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} P_0(x) = 1, & P_1(x) = x \\ \forall k \in [\![2, n]\!] & P_k(x) = \dfrac{x(x-k)^{k-1}}{k!} \end{cases}$$

1. Montrer que $(P_0, P_1, .., P_n)$ est une base de E.
2. Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $P_k'(x+1) = P_{k-1}(x)$.
   (P_k' désignant la fonction dérivée de la fonction P_k)
3. Soit f l'application qui à tout élément P de E associe la fonction Q définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$Q(x) = P(x) - P'(x+1)$$

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E et préciser sa matrice A relativement à la base $(P_0, P_1, ..., P_n)$
   (b) En déduire que f est un automorphisme de E.
   (c) Déterminer A^{-1}.
4. On suppose dans cette question $n = 3$.

   (a) Déterminer l'unique fonction polynôme P telle que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) - P'(x+1) = x^3$$

   (b) Déterminer de même l'unique fonction polynôme R telle que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) - 2R'(x+1) + R"(x+2) = x^3$$

EXERCICE 2

On rappelle que si f est une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle I, la $k^{ième}$ fonction dérivée de f se note $f^{(k)}$, avec la convention : $f^{(0)} = f$.
On rappelle d'autre part que si u et v sont deux fonctions k fois dérivables sur un intervalle I, alors le produit $u.v$ est une fonction k fois dérivable sur I avec :

$$\forall x \in I, \quad (u.v)^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i u^{(i)}(x) v^{(k-i)}(x), \qquad \text{où } C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!} \qquad \text{(formule de Leibniz)}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}, \quad x \in]0, 1]$, on pose :

$$\varphi_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n; \qquad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

(a) Dire pourquoi f est indéfiniment dérivable sur $]0,1[$ et déterminer les dérivées successives de f.

(b) Exprimer $\varphi_n(x) - f(x)$ et en déduire : $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$.

(c) Plus généralement, soit k fixé tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, à l'aide de la formule de Leibniz, donner une expression de $\varphi_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)$.
En déduire $\lim_{n\to+\infty} \left(\varphi_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\right)$ et la formule :

$$\forall x \in]0,1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est définie par :

$$\begin{cases} & P(X=0) = 1 - \dfrac{p\lambda}{1-p} \\ \forall k \in \mathbb{N}^\times, & P(X=k) = \lambda p^k \end{cases}$$

où λ et p sont deux nombres strictement positifs fixés tels que $p < 1$ et $\lambda < \dfrac{1}{p} - 1$.

(a) Vérifier qu'il s'agit d'une loi de probabilité.

(b) Déterminer l'espérance et la variance de X.

3. On effectue un nombre aléatoire de lancers d'une pièce équilibrée, le nombre de lancers suivant la loi de X. On note Y le nombre aléatoire de "Pile" obtenus.

(a) Pour k et i appartenant à $\mathbb{N}$, calculer $P(Y = k/X = i)$; (probabilité de l'évènement $Y = k$ sachant que l'évènement $X = i$ est réalisé).
En déduire la loi du couple (X, Y).

(b) Montrer que pour $k \geqslant 1$, on a : $P(Y = k) = \dfrac{2p^k\lambda}{(2-p)^{k+1}}$.

PROBLEME

PARTIE 1

1. Montrer que pour tout réel x, il existe un unique entier relatif tel que $2n - 1 < x \leqslant 2n + 1$;
Cet entier est noté $n(x)$.

2. Soit alors f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x - 2n(x))\,(1 - |x - 2n(x)|)$$

(On a donc, par exemple : si $x \in]-1,1]$, $\quad f(x) = x(1-|x|)$; $\quad$ si $x \in]1,3]$, $\quad f(x) = (x-2)(1-|x-2|)$, ...)

(a) Etudier brièvement la restriction de f à l'intervalle $]-1,1]$.

(b) Vérifier que f est périodique de période 2. (C'est-à-dire, montrer que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+2) = f(x)$)

(c) En déduire la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $]-1,5]$.

3. Montrer que f est continue à gauche et à droite en 1. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que f est dérivable en 0 et en 1, préciser les valeurs de $f'(0)$ et $f'(1)$.
En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

PARTIE 2

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{\times}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ (f a été définie dans la première partie)

   (a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que g est dérivable sur $\mathbb{R}^{\times}$.

   (b) g est ainsi prolongée, est-elle dérivable en 0 ?

2. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \int\limits_p^{p+1} g(x)dx$.

   (a) Calculer I_0, I_1.

   (b) Vérifier que l'on a : $\forall p \in \mathbb{N}^{\times}, \quad I_p = (-1)^p \int\limits_0^1 \dfrac{x(1-x)}{x+p} dx$.

   (c) Montrer que l'on a : $\forall p \in \mathbb{N}^{\times}, \quad |I_p| > \dfrac{1}{6(p+1)}$. En déduire la nature de la série $\sum\limits_0^{+\infty} |I_p|$.

   (d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \sum\limits_{k=0}^{n} I_k$. Montrer que les suites extraites $(J_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de sens contraires. En déduire la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (e) Montrer que l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} g(x)dx$ est convergente.

3. En remarquant que $x^2 - x = (x+p)(x-p-1) + p(p+1)$, calculer I_p pour $p \in \mathbb{N}$.

FIN