ISCID 1987 Option générale

PROBLEME I

$\mathbb{R}[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
E est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et du polynôme nul.
$\mathfrak{B} = (1, X, X^2)$ est la base canonique de E.
Si P est un élément de E, on note P' son polynôme dérivé d'ordre un et P" sont polynôme dérivé d'ordre deux.
(a, b) étant un couple de réels, on note $U_{a,b}$, l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall P \in E, \quad U_{a,b}(P) = (a + X^2)P\text{"} + (1 + bX)P'$$

Question 1

1. Montrer que $X = (1, 1 - X, 2X + X^2)$ est une base de E.
2. Donner dans la base C les coordonnées de $P = 1 + X + X^2$.

Question 2

Déterminer les couples (a, b) de réels tels que si le réel 1 est zéro d'ordre deux de P un polynôme non nul de E alors le réel 1 est zéro de $U_{a,b}(P)$.

Question 3

1. Ecrire la matrice de $U_{a,b}$ dans la base B. On notera $M_{a,b}$ cette matrice.
2. Déterminer les couples (a, b) de réels tels qu'il existe un polynôme non nul de E vérifiant $U_{a,b}(P) = -P$.
3. Etudier le rang de la matrice $M_{a,b}$ suivant les valeurs des réels a et b.

Question 4

On suppose dans cette question que $b = -1$ et l'on pose $f_a = U_{a,-1}$ et $A_a = M_{a,-1}$ pour simplifier l'écriture

1. Préciser le noyau et l'image de f_{-1}.
2. $(a, a') \in \mathbb{R}^2$. Calculer le produit matriciel $A_a.A_{a'}$.
   La loi $\circ$ étant l'habituelle loi de composition des applications, exprimer $f_a \circ f_{a'}$, à l'aide de f_{-1} et calculer pour n entier naturel supérieur ou égal à deux la composée de f_a^n de n endomorphismes égaux à f_a.
3. Montrer que dans la base C de E la matrice de f_a^n pour n entier naturel supérieur ou égal à deux est de la forme
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha_n \in \mathbb{R}$$
4. I_E étant l'identité sur E, on pose $\varphi_a = f_a^2 + I_E$. Ecrire dans la base C la matrice de φ_a. En déduire que φ_a est inversible et écrire dans la base C la matrice de φ_a^{-1}, l'inverse de φ_a.
   Résoudre dans E l'équation
   $$f_a^2(P) + P - (1 + X + X^2) = 0$$

PROBLEME II

(A)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $t \mapsto e^t - t$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \dfrac{1}{e^t - t}$.
On note C_g la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé R_1 (unité 2 cm) et C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé R_2 (unité 10 cm)

Question 1

1. Donner le tableau de variations de g.
2. Démontrer les inégalités suivantes

$$\begin{array}{llc} (I_1): & \forall t \in]-\infty, 0[, & -t < g(t) < 1 - t \\ (I_2): & \forall t \in \mathbb{R}, & g(t) \geqslant \dfrac{e-1}{e} e^t \end{array}$$

3. Etudier les branches infinies de C_g.
4. Tracer la courbe C_g dans le repère R_1.

Question 2

1. (a) Calculer la dérivée de f.
   (b) Montrer que g et f étant indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour p entier naturel non nul, on note $f^{(p)}$ la dérivée d'ordre p de f, $f^{(0)}$ représente la fonction f elle-même. Démontrer ue :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times} \backslash \{1\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$(e^t - t) f^{(n)}(t) - n(e^t - 1) f^{(n-1)}(t) + e^t \sum_{k=2}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(t) = 0$$

   En déduire les relations suivantes :

$$\begin{array}{lcll} \forall n & \in & \mathbb{N}^{\times} \backslash \{1\}, & f^{(n)}(0) = -\displaystyle\sum_{k=2}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(0) \\ \forall n & \in & \mathbb{N}^{\times} \backslash \{1\}, & f^{(n)}(1) = -n . f^{(n-1)}(1) - \dfrac{e}{e-1} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(1) \end{array}$$

2. Ecrire
   (a) le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de $t = 0$
   (b) le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de $t = 1$
3. Donner le tableau de variation de f. Préciser le comportement de f au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.
4. Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point A d'abscisse $t = 1$ et préciser la position de C_f par rapport à T au voisinage de $t = 1$.
5. (a) Montrer que la dérivée seconde de f peut s'écrire sous la forme

$$e^t . \frac{1}{(e^t - 1)^3} . h(t)$$

   avec

$$h(t) = e^t + t + 2e^{-t} - 4$$

(b) Etudier le signe des dérivées seconde et première de h et montrer que h s'annule pour deux valeurs α et β telle que

$$-1 < \beta < 0 < \alpha < 1$$

Que peut-on en déduire pour C_f ?

(c) Calculer une valeur de α à 10^{-2} près.

(d) Tracer la droite T et la courbe C_f dans le repère R_2. On placera en particulier les points de C_f d'abscisses

$$-\frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1, \quad \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad 2$$

(B)

La notation $\ln(t)$ représente pour t réel strictement positif le logarithme népérien de f.
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \int_0^x f(t)dt$$

et l'on note C_F sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal R_3.

Question 1

1. Montrer que F est dérivable, strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
   Donner le tableau de variations de F.

2. Ecrire le développement limité de F à l'ordre 3 au voisinage de $x = 0$.
   Donner une équation de la tangente à C_F au point d'abscisse $x = 0$ et préciser la position de C_F par rapport à sa tangente au voisinage de $x = 0$.

Question 2

1. Démontrer les inégalités suivantes

$$\begin{array}{lll} (I_1') : & \forall t \in]-\infty, 0[, & \dfrac{1}{1-t} < f(t) < -\dfrac{1}{t} \\ (I_2') : & \forall t \in \mathbb{R}, & f(t) \leqslant \dfrac{e}{e-1}e^{-t} \end{array}$$

2. (a) Démontrer que :

$$\forall x \in]-\infty, -1], \quad -\ln(-x) \leqslant F(x) - F(-1) \leqslant \ln 2 - \ln(1-x)$$

   (b) Calculer, quand x tend vers $-\infty$, la limite de $F(x)$ et celle de $\dfrac{F(x)}{x}$.
   Que peut-on en conclure pour la courbe C_F au voisinage e $-\infty$?

3. Montrer que $F(x)$ admet une limite L quand x tend vers $+\infty$ et que $L < \dfrac{e}{e-1}$.
   Que peut-on en déduire pour la couebe C_F au voisinage de $+\infty$?

4. Donner l'allure de C_F dans le repère R_3.