ISCID 1989 Option générale

PROBLEME I

PARTIE A

Question 1) Soit X un aléa de Poisson de paramètre μ réel strictement positif. Pour k entier naturel $P(X = k)$ est la probabilité que X prenne la valeur k.

1. Calculer, en fonction de μ et de l'entier naturel k, le rapport $\dfrac{P(X = k+1)}{P(X = k)}$.
   En déduire que si μ est un entier naturel non nul, la distribution de X admet deux modes.
2. On note F la fonction répartition de X, et l'on considère l'application g de $\mathbb{R}_+^\times$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :
   $$\mu \mapsto g(\mu) = F(2)$$
   Etudier les variations de g et préciser les valeurs de $g(\mu)$, pour $\mu \in \{2, 3, 4\}$.
   Déterminer μ sachant que :
   $$\forall \mu \in \mathbb{N}^\times, \quad F(X > 2) > 0,8 \quad \text{et que} \quad P(X = 0) > 0,004.$$

Question 2) On suppose dans cette question que X et Y sont deux aléas de Poisson indépendants de paramètres respectifs μ et μ' et l'on rappelle que la variable aléatoire $S = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu + \mu'$. Pour $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, calculer la probabilité de l'évènement

$$\text{" } (X = a) \text{ sachant } (S = b) \text{ "}$$

Quelle est la loi de X conditionné par " $(S = b)$ " ?

PARTIE B

Dans un grand magasin de vente d'appareils électroménagers, la demande hebdomadaire, pour un type A d'appareils, est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\mu = 5$.

Question 1)

1. Quelle est (ou quelles sont) la (ou les) valeur(s) la (ou les) plus probable(s) de la demande hebdomadaire ?
2. Calculer les probabilités suivantes :
   $$P(2 < X \leqslant 4) \quad \text{et} \quad P_{(X>3)}(X > 4)$$

Question 2) On suppose qu'en début de chaque semaine le magasin dispose d'un stock s d'appareils du type A et que l'on dit qu'il y a rupture de stock si la demande en cours de semaine est strictement supérieure à s.

1. Calculer la probabilité p qu'il y ait rupture de stock en cours de la semaine si $s = 8$.
2. Quelle sera en moyenne sur une année de 52 semaines le nombre de semaines au cours desquelles il y aura une rupture de stock si en début de chaque semaine $s = 8$?

Question 3) On suppose que les demandes hebdomadaires d'appareils du type A pendant les quatre premières semaines de l'année sont quatre aléas de Poisson indépendants X_1, X_2, X_3, X_4 de même paramètre $\mu = 5$ et l'on note Z la somme $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

1. Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z.
2. Calculer la probabilité de l'évènement
   $$\text{" } (X_1 = 3) \text{ " conditionné par l'évènement " } (Z = 7) \text{ "}$$

PROBLEME II

PARTIE A

Question 1) Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto 1 + (t-1)e^t$$

On ne demande pas de courbe représentative.

Question 2) Soit θ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} t \mapsto \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ \theta(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que θ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les variations de θ et en déduire que θ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^{\times}$.
   One ne demande pas de courbe représentative.

PARTIE B

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$.
On note U l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E \mapsto U(f) = \phi,$$

où ϕ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$$

(I)

Question 1)

1. Montrer que U est linéaire.
2. Montrer que ϕ est dérivable et préciser $\phi'(x)$.
3. En déduire que U est un endomorphisme non surjectif de E.

Question 2) On note F_T le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et de période T et W la restriction de U à D_T.

1. Montrer que F_T est stable par W.
2. Calculer $\phi'(x)$ si $\phi = U(f)$ avec f élément de F_T dans le cas où $T = 1$.
3. Montrer que si f est continue de période $T = 1$ et telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) = 0.$$

4. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto \sin(2\pi t)$$

   satisfait aux conditions de la question précédente. U est-il injectif ?

Question 3) Calculer $\phi(x)$ dans les cas suivants :

1. $f : \forall t \in \mathbb{R}, \quad t \mapsto a, \quad a$ réel donné
2. $f : \forall t \in \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^k, \quad k \in \mathbb{N}^\times$
3. $f : \forall t \in \mathbb{R}, \quad t \mapsto e^{\alpha t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Question 4) Dans cette question f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\phi = U(f)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si f est convexe, ϕ est convexe.

Question 5)

1. Ecrire le développement limité de $\ln(1+u)$ au voisinage de $u = 0$ à l'ordre 2.
   En déduire le développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$ de :
   $$x \mapsto \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{2x + x^2}{2}\right)$$
2. On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$t \mapsto \ln(1+t^2).$$
   Calculer dans ce cas le développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$ de $\phi'(x)$.
   En déduire le développement limité à l'ordre 3 en $x = 0$ de $\phi(x) - \phi(0)$.

(II)

On note E_3 le sous-espace de E formé des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et de la fonction nulle et l'on note V la restriction de U à E_3

Question 1)

1. Déduire du **(I)** question 3) (2). que E_3 est stable par V donc que V est un endomorphisme de E_3.
2. Ecrire A la matrice de V dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de E_3

Question 2)

1. V est-elle bijective ? si oui, calculer A^{-1}.
2. Quelles sont les valeurs propres de A ? A est-elle diagonalisable ?

(III)

On dira qu'un réel μ est valeur propre pour U s'il existe une fonction f non nulle de E telle que $\phi = U(f) = \mu f$.

Question 1) Montrer à l'aide des résultats des parties **(I)** et **(II)** que 0 et 1 sont des valeurs propres pour U et donner des fonctions propres associées à ces valeurs propres.

Question 2)

1. Déduire du **(I)** question 3) (3) que :
   $$\forall \alpha \in \mathbb{R}^\times, \quad \mu = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha}$$
   est valeur propre pour U et que
   $$t \mapsto e^{\alpha t}$$
   est une fonction propre associée.
2. Montrer à l'aide des résultats de la partie A que tout réel strictement positif est valeur propre pour U.
   En déduire que tout réel positif est valeur propre pour U.