ISCID 1991 Option générale

EXERCICE I

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, $B = (e_1, e_2, .., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On pose :

$$\forall i = 1, 2, .., n, \quad f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} e_k$$

1. (a) Ecrire la matrice M de f dans la base B.
   (b) Exprimer M^2 en fonction de M et de n.
   (c) Exprimer dans la base B les vecteurs suivants :

   $$f(e_1 + e_2 + \cdots + e_n) \quad \text{et pour } i = 1, 2, .., n-1, \quad f(e_i - e_n).$$

   Déduire du 1b que f possède au plus deux valeurs propres 0 et n;
   Déterminer les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres; donner une base pour chacun d'eux.

2. On note Id l'application identique dans $\mathbb{R}^n$; on donne $(a, b) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$, et on pose :

   $$g = af + bI$$

   Déduire de la question précédente les valeurs propres et les espaces propres de g.

3. On pose $T = aM + bI$, I la matrice de l'application Id .
   Pour tout entier k, calculer T^k en fonction de M, k, a, b (on pourra utilser la formule du binôme de Newton.

EXERCICE II

On considère l'expérience suivantes : deux personnes écrivent chacune au hasard un nombre à deux chiffres.
On note X et Y chacun de ces deux nombres

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :

   $$(X = Y); \quad (X < Y)$$

2. On répète 300 fois cette expérience; quelle est la probabilité pour qu'au moins une fois les deux personnes écrivent le même nombre.

3. On répète n fois cette expérience; déterminer n pour que la probabilité qu'au moins une fois les deux personnes écrivent le même numéro soit supérieur à $0,99$.

PROBLEME

Soit g la fonction réelle définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x}} & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Montrer, par récurrence sur n, que la dérivée $n^{ième}$ de g existe sur $[0, 1[$ et s'écrit :

$$g^{(n)}(x) = g(x)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

   où P_n est un polynôme de degré $2n$, vérifiant la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad P_n(x) = x^2\left[P'_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)\right]$$

   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} g^{(n)}(x)$.
   En déduire que g est indéfiniment dérivable sur $[0, +\infty[$.

3. Pour tout x réel, on pose :

$$f(x) = g(x^2) \quad \text{et} \quad A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$$

   (a) Préciser l'expression de f.

   (b) Montrer que l'intégrale A existe et est égale à $\int_{-1}^{1} e^{\frac{-1}{1-t^2}}dt$.

   Calculer par la méthode des rectangles une valeur approchée par excès de $\int_{0}^{1} e^{\frac{-1}{1-t^2}}dt$ (on partagera l'intervalle $[0, 1]$ en cinq parties égales).
   En déduire une valeur approchée par excède de A.

4. Pour tout entier n et tout réel x, on pose :

$$f_n(x) = \frac{n}{A}f(nx).$$

   (a) Exprimer $f_n(x)$ avec la fonction exponentielle.

   (b) Montrer que : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = 1$.

   (c) Etudier la fonction $x \mapsto f_2(x)$ et faire sa représentation graphique (on prendra ici $A = 0,45$).

5. On suppose que f_n est la fonction de densité d'une variable aléatoire réelle T_n.

   (a) Démontrer que l'espérance de T_n est nulle.

   (b) Pour tout x réel, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \leqslant x)$ (on distinguera les cas $x < 0$, $x > 0$ et $x = 0$)