ISG 1979 Math I

Toutes les questions traitées doivent être référencées avec précision.
La présentation ainsi que la rigueur des raisonnements ont une importance fondamentale

I

On désigne par Ω l'ensemble des nombres complexes de module 1 et par θ le réel de l'intervalle $[0, 2\pi]$ défini par :

$$\sin\theta = 0,96 \qquad \cos\theta = 0,28$$

On définit une suite de nombres complexes (z_p) où $p \in \mathbb{N}$ comme suit :

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \qquad z_1 = \cos\theta + i\sin\theta \\ z_p &= z_1^p \text{ pour tout } p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

z_p et z_q étant deux éléments quelconques de cette suite, on notera simplement $d_{p,q}$ pour $d(z_p, z_q)$
On rappelle que la distance de deux nombres complexes c_1, c_2 est donnée par :

$$d(c_1, c_2) = |c_1 - c_2|$$

1. Montrer que $z_p \in \Omega$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer $d_{p,q}$ en fonction de θ puis, sans radicaux, en fonction de $\dfrac{\theta}{2}$.
3. Calculer $\cos\dfrac{\theta}{2}$ et $\sin\dfrac{\theta}{2}$ et en déduire que $d_{p,q}$ est un nombre rationnel que que soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
4. On définit maintenant une sous-suite (Z_k) de (z_p) par la relation : $Z_k = z_{2^k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   Montrer que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, la partie réelle de Z_k est un nombre de la forme :
   $$a_k.10^{-(2^k+1)}, \qquad \text{où } a_k \in \mathbb{Z}\backslash 10\mathbb{Z}$$
   et en déduire que les Z_k sont deux à deux distincts.
5. On pose $\theta = \alpha\pi$. Démontrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) α est irrationnel
   (b) les z_p forment une famille infinie
   (c) les z_p sont deux à deux distincts

   Déduire du 4 que α et les z_p vérifient ces trois propositions
6. Pour tout $n \geqslant 2$, on définit le réel strictement positif $d_n = \inf\limits_{\substack{0\leqslant p\leqslant n-1\\ 0\leqslant q\leqslant n-1}} (d_{p,q})$
   Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\quad d_n \leqslant 2.\sin\dfrac{\pi}{n}$ et en déduire que d_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini
7. Montrer que $d_{p,q} = q_{p+m,q+m}$ quel que soit $(p,q,m) \in \mathbb{N}^3$.
8. Soit ε un réel strictement positif quelconque et soit c un point quelconque de Ω; montrer qu'il existe au moins un entier n tel que $d(c, z_n) \leqslant \varepsilon$.

II

On définit une suite de polynômes à une indéterminée et à coefficients réels de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_0 &= 1; \qquad P_1 = x \\ P_n &= xP_{n-1} - P_{n-2} \qquad \text{pour } n \geqslant 2. \end{aligned}$$

1. Expliciter P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8.
   On ordonnera ces polynômes suivant les puissances décroissantes de x.
2. Déterminer le degré et la parité de P_n.
3. Reproduire et remplir le tableau suivant :
   (Sur la case située dans la rangée de P_i et dans la case de x, on écrit la valeur de $P_i(x)$. Les quatres valeurs indiquées ont pour but de vous aider à déceler une erreur éventuelle dans vos calculs des P_i)

$P_i \diagdown x$	-2	-1	0	1	2
P_0					
P_1					
P_2					
P_3					
P_4					
P_5					
P_6					
P_7					
P_8					

4. Calculer $P_n(-2)$, $P_n(-1)$, $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2)$
5. Montrer que $P_n = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}} (-1)^i C_{n-i}^i x^{n-2i}$
   On traitera séparément les cas n pair et n impair.
6. Indiquer un procédé donnant instantanément le polynôme P_n à partir du triangle de Pascal
7. Vérifier l'égalité :
$$C_{n-1}^p = \frac{n-p}{n+p}\left(C_n^p + C_{n-1}^{p-1}\right)$$
8. En déduire que pour $n \geqslant 1$, $P_n = \dfrac{P'_{n+1} - P'_{n-1}}{n+1}$, P' désignant le polynôme dérivé de P.

III

1. Soit $S = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, un polynôme à coefficients entiers; montrer que si $\dfrac{p}{q}$ est une fraction irréductible, racine du polynôme S, alors, q divise a_n et p divise a_0.
2. En déduire que les racines rationnelles des P_n du II. sont entières.
3. Soit $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ la matrice de la rotation vectorielle Ψ_t d'angle t, dans $\mathbb{R}^2$ et posons $t = \lambda\pi$
   (a) Démontrer l'équivalence des deux propositions suivantes
      i. il existe un entier n tel que $\Psi_t^n = \mathrm{Id}$
      ii. $\lambda \in \mathbb{Q}$
   (b) Vérifier que $\Psi_t^2 - 2\cos t\Psi_t + \mathrm{Id} = 0$
      (Id est l'identité de $\mathbb{R}^2$).

4. Posant $x = 2\cos t$, montrer que pour $n \geqslant 1$:

$$\Psi_t^{n+1} = P_n(x)\Psi_t - P_{n-1}(x)\,\mathrm{Id},$$

les P_n étant ceux du II.

5. Déterminer l'ensemble des rotations vectorielles de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\Psi_t^2 = \mathrm{Id}$.
(Il s'agit en fait de déterminer les matrices correspondantes)

6. Supposant $\Psi_t^2 \neq \mathrm{Id}$, indiquer une condition nécessaire et suffisante sur $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ pour que l'on ait :

$$\Psi_t^{n+1} = \mathrm{Id}$$

(x représente toujours $2\cos t$)

7. $\pi\mathbb{Q}$ désignant l'ensemble des réels de la forme $\alpha\pi$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}$, déterminer l'ensemble des couples (t, n) de $([0, 2\pi] \cap \pi\mathbb{Q}) \times \mathbb{N}$ vérifiant l'équation :

$$\Psi_t^{n+1} = \mathrm{Id},$$

et respectant la condition $\cos t \in \mathbb{Q}$.
(On pourra utiliser II. 3 et 4)

8. Déterminer l'ensemble des éléments de $[0, 2\pi] \cap \pi\mathbb{Q}$ dont le sinus est rationnel

9. En déduire l'ensemble des éléments de $[0, 2\pi] \cap \pi\mathbb{Q}$ dont le sinus et le cosinus sont rationnels

FIN