ISG 1980 Math I

Toutes les question traitées doivent être référencées avec précision.
La présentation ainsi que la rigueur des raisonnements ont une importance fondamentale.

Préliminaires

On désigne par $\mathbb{C}^m$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension m, des m-uplets de nombres complexes, et par $\mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{C}^m$ $(m \in \mathbb{N}^\times)$

On pose $\mathfrak{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_m})$ =, où $\overrightarrow{e_i}$ est le m-uplet dont la $i^{ième}$ composante est égale à 1 et dont les autres composantes sont toutes nulles; on notera $\overrightarrow{0}$ l'élément neutre de $\mathbb{C}^m$.

Sauf pour les $\overrightarrow{e_i}$, les lettres minuscules représenteront de nombres complexes, et les lettres majuscules d'imprimerie, des m-uplets. Par exemple :

$$P = \sum_{i=1}^{m} p_i \overrightarrow{e_i}.$$

Enfin, on dira qu'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}^m$ converge dans $\mathbb{C}^m$ et a pour limite Q si et seulement si la suite numérique de terme général $u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} |p_{i,n} - q_i|$ converge vers 0, $p_{i,n}$ et q_i étant respectivement les composantes de rang i de P_n et Q relativement à $\mathfrak{B}$. On écrira simplement : $(P_n) \to Q$.

I

Q.1

1. Montrer que, quel que soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$,

$$\left[(P_n) \to \overrightarrow{0}\right] \Rightarrow \left[(\varphi(P_n)) \to \overrightarrow{0}\right]$$

2. En déduire que, quel que soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$

$$[(P_n) \to Q] \Rightarrow [(\varphi(P_n)) \to \varphi(Q)]$$

3. Sous quelle condition, l'implication réciproque de la précédente est-elle vraie ?

Q.2 Soit $\mathcal{S} = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$ et $E(\mathcal{S})$ l'ensemble des éléments P de $\mathbb{C}^m$ tels que la suite $(\varphi(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}^m$.

1. Montrer que $E(\mathcal{S})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^m$.
2. On définit l'application $\widehat{\varphi}$ de $E(\mathcal{S})$ dans $\mathbb{C}^m$ par la relation suivante, vraie quel que soit $P \in E(\mathcal{S})$:

$$\widehat{\varphi}(P) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(P)$$

Montrer que $\widehat{\varphi}$ est un homomorphisme de $E(\mathcal{S})$ dans $\mathbb{C}^m$.

3. On dira que $\mathcal{S}$ converge dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$ si et seulement si $E(\mathcal{S}) = \mathbb{C}^m$, $\widehat{\varphi}$ s'appellera alors la limite de $\mathcal{S}$ et on écrira simplement $(\varphi_n) \rightsquigarrow \widehat{\varphi}$.
   Soit $(X_1, X_2, ..., X_m)$ une base quelconque de $\mathbb{C}^m$. Montrer que :
   $$[(\varphi_n) \rightsquigarrow \widehat{\varphi}] \Leftrightarrow [\forall X_i, \quad \varphi_n(X_i) \to \widehat{\varphi}(X_i)]$$
4. Soient $[a_{i,j}^{(n)}]$ et $[b_{i,j}]$ les matrices respectives de φ_n et $\widehat{\varphi}$ [1]. Montrer que :
   $$[(\varphi_n) \rightsquigarrow \widehat{\varphi}] \Leftrightarrow \left[\forall (i,j), \quad \lim_{n\to+\infty} \left|a_{i,j}^{(n)} - b_{i,j}\right| = 0\right]$$
5. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$. On définit la suite $\mathcal{S} = (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :
   $$\psi_0 = \mathrm{Id}, \quad \psi^1 = \varphi, \quad \text{et pour } n \geqslant 2 : \psi_n = \varphi \circ \psi_{n-1}$$
   Montrer que :
   $$[(\psi_n) \rightsquigarrow \mathrm{Id}] \Leftrightarrow [\varphi = \mathrm{Id}]$$
   (Id désignant l'identité sur $\mathbb{C}^m$)

II

On se place maintenant dans $\mathbb{C}^4$. Dans toute la suite, on note φ l'application de $\mathbb{C}^4$ dans lui-même qui à $P = \sum_{i=1}^{4} p_i \overrightarrow{e_i}$ fait correspondre
$$\varphi(P) = \frac{1}{2}\left[(p_1+p_2)\overrightarrow{e_1} + (p_2+p_3)\overrightarrow{e_2} + (p_3+p_4)\overrightarrow{e_3} + (p_4+p_1)\overrightarrow{e_4}\right]$$
et on notera $V = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}$.

Q.3

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$.
2. Expliciter la matrice M de φ relativement à $\mathfrak{B}$.
3. Déterminer le noyau de φ.
4. Soit ψ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ défini par :
   $$\psi\left(\sum_{i=1}^{4} p_i \overrightarrow{e_i}\right) = (p_1 - p_2 + p_3 - p_4)V$$
   Montrer que $\ker\psi = \operatorname{Im}\varphi$.
5. En identifiant $\mathbb{C}^4$ à l'ensemble des quadruplets du plan réel, quelle interprétation géométrique donnez-vous du résultat précédent ?

Q.4

1. Expliciter les matrice de φ, φ^2 et φ^3 relativement à $\mathfrak{B}$.
2. En notant $\equiv$ la congruence dans $\mathbb{Z}$ modulo 4, montrer que, quel que soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$
   $$\sum_{\substack{i\equiv k\\ 0\leqslant i\leqslant n}} C_n^i + \sum_{\substack{i\equiv k+1\\ 0\leqslant i\leqslant n}} C_n^i = \sum_{\substack{i\equiv k+1\\ 0\leqslant i\leqslant n+1}} C_{n+1}^i$$

[1] Relativement à une base donnée

3. En déduire la forme générale de la matrice φ^n.

Q.5

1. Montrer que V est un vecteur propre de φ et préciser la valeur propre correspondante.
2. Déterminer tous les vecteurs propres.
3. Donner pour chacune d'elles, le veecteur propre correspondant, dont la première composante relativement à $\mathfrak{B}$ est égale à 1.
4. Exprimer la matrice de φ relativement à la base $\mathfrak{B}_0 = (V, V_1, V_2, V_3)$ des vecteurs propres de φ calculés à la question précédente, V_2 et V_3 étant associés aux valeurs propres non réelles de φ.
5. En déduire que la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\psi_0 = \mathrm{Id}, \quad \psi = \varphi \qquad \text{et pour tout } n \geqslant 2 \text{ par } \psi_n = \varphi \circ \psi_{n-1},$$

converge dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$ et préciser sa limite. Interprétation géométrique ?
6. En déduire la limite, quand $n \to +\infty n$ de la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{2^n}\left(p_1 \sum_{\substack{i\equiv 0\\ 0\leqslant i\leqslant n}} C_n^i + p_2 \sum_{\substack{i\equiv 1\\ 0\leqslant i\leqslant n}} C_n^i + p_3 \sum_{\substack{i\equiv 2\\ 0\leqslant i\leqslant n}} C_n^i + p_4 \sum_{\substack{i\equiv 3\\ 0\leqslant i\leqslant n}} C_n^i\right)$$

où (p_1, p_2, p_3, p_4) est un élément quelconque de $\mathbb{C}^4$

Q.6 Vous avez certainement compris que, à une identification près, $\mathrm{Im}(\varphi)$ n'est autre que l'ensemble des parallélogrammes du plan réel. On appellera "carré" tout élément P de $\mathrm{Im}(\varphi)$ vérifiant les conditions :

$$\begin{array}{ll} \alpha & |p_3 - p_1| = |p_4 - p_2| \\ \beta. & \mathrm{Re}\left[(p_3 - p_1)(\overline{p_4} - \overline{p_2})\right] = 0 \end{array}$$

1. Quelle est la signification géométrique de α ?
2. Quelle est la signification géométrique de β ?
3. Montrer que tout "carré" P se décompose d'une manière unique sous la forme :

$$P = \lambda_1 V + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 \text{ avec } \lambda_2\lambda_3 = 0$$

4. Montrer que tous les éléments de $\mathbb{C}^4$ qui se décompose ainsi sont des "carrés"
5. Calculer λ_1, λ_2 et λ_3 en fonction des p_i

Soit P un élément de $\mathbb{C}^4$ et σ un endomorphisme de $\mathbb{C}^4$. On dira que σ "translate" P s'il existe un complexe p tel que $\sigma(P) = P + pV$. On notera $T(\sigma)$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}^4$ que σ "translate", $\mathfrak{S}$ l'ensemble des endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ qui "translatent" tous les éléments de $\mathbb{C}^4$ et $\mathfrak{S}_0$ l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{C}^4$ qui appartiennent à $\mathfrak{S}$.

Q.7

1. Montrer que, quel que soit $\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$, $T(\sigma)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$.
2. Montrer que $\mathfrak{S}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^4$ (Préciser les opérations).
3. Montrer que $\mathfrak{S}_0$, muni de la composition des applications, est un groupe non commutatif.
4. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}$, 1 est valeur propre de σ avec un ordre de multiplicité au moins égal à 3.
5. Expliciter une famille libre de trois vecteurs propres de σ associés à la valeur propre 1, en fonction des $\overrightarrow{e_i}$ et des a_i, où $\sigma(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{e_i} + a_i V$.
6. Montrer que, si $\sigma \in \mathfrak{S}$, $\quad [a \in \mathfrak{S}_0] \Leftrightarrow \left[\sigma(V) \neq \overrightarrow{0}\right]$.

7. Posant $\sigma(V) = V + vV$, redémontrer la question précédente en calculant le déterminant de σ en fonction de v.

Q.8 Soient $\sigma \in \mathfrak{S}$ et $P \in \mathbb{C}^4$. On pose $\sigma(V) = V + vV$ et $\sigma(P) = P + pV$.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	$v = 0$	$v \neq 0$
$p = 0$	$\sigma^n(P) = \cdots$	$\sigma^n(P) = \cdots$
$p \neq 0$	$\sigma^n(P) = \cdots$	$\sigma^n(P) = \cdots$

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur v pour que la suite des σ^n converge dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$.
3. Préciser cette limite lorsqu'elle existe.
4. Montrer que si σ et τ sont deux éléments de $\mathfrak{S}$ tels que la suite des σ^n et la suite des τ^n convergent toutes les deux dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$, $\sigma \circ \tau$ est aussi un élément de $\mathfrak{S}$ tel que la suite des $(\sigma \circ \tau)^n$ converge dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$.