ISG 1982 Math II

PROBLEME I

Soit $C = \{c_1, c_2, .., c_n\}$ un ensemble de n couleurs distinctes ($n \in \mathbb{N}^\times$).
Une urne contient deux boules de couleur c_i, deux boules de couleurs c_2, ..., deux boules de couleur c_n, soit $2n$ boules, dont exactement deux par couleur de C. On note E_n l'ensemble de ces boules.
On vide l'urne en prenant les boules deux par deux, au hasard, avec à chaque tirage une probabilité égale de prendre n'importe quelle paire de boules disponibles.
On dira que deux boules de même couleur forme une paire homogène.

I. (1) De combien de façons différentes peut-on vider l'urne ?

(2) En déduire le nombre h_n de partitions de E_n formées de n parties à deux éléments.

(3) Ecrire h_n sous la forme d'un produit d'entiers naturels.

II. (1) Quelle est la probabilité de prendre ensemble les deux boules de couleur c_1 au premier tirage ?

(2) Même question, mais au deuxième tirage.

(3) Généraliser.

(4) En déduire la probabilité de prendre ensemble, au cours du vidage, les deux boules de couleur c_1.

III. Pour la suite, on notera $p_{k,n}$ la probabilité de tirer exactement k paires homogènes au cours du vidage.

(1) Calculer $p_{n,n}$.

(2) Calculer $p_{n-1,n}$.

(3) Calculer $p_{0,2}$ et en déduire $p_{n-2,n}$.

(4) Montrer que, pour tout $k \neq 0$, $\quad p_{k,n} = \dfrac{p_{0,n-k}}{k!} \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \left(\frac{n+1-i}{2(n+1-i)+1} \right)$

IV. Des calculs sur ordinateur suggèrent que la suite numérique des $p_{0,n}$ ($n \in \mathbb{N}$) est croissante, à partir du quatrième terme.
Montrer que cette hypothèse est véridique, la suite des $p_{0,n}$, privée de ses trois premiers termes, est majorée pr $e^{-1/2}$.

PROBLEME 2

Soient deux réels a et b tels que $0 < a < e^b$.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations suivantes :

$$u_0 = a(b - \ln a) \qquad \text{et pour } n \geqslant 1, \quad u_n = u_{n-1}(b - \ln u_{n-1})$$

1. Montrer que la suite' $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2. Calculer sa limite.

PROBLEME 3

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^\times$ définie pour tout x réel par :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

I. Montrer que f est :

(1) indéfiniment dérivable (on établira que la dérivée d'ordre n (pour $n \geqslant 2$) de f est de la forme

$$f^{(n)}(x) = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} Q_n(x),$$

où $Q_n(x)$ est une fraction rationnelle dont le polynôme dénominateur n'a aucune racine réelle.

(2) strictement croissante et convexe.

(3) une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^\times$.

(4) l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est-elle convergente ?

II. Représenter le graphe de f dans un repère orthonormé, après avoir étudié les deux branches infinies.

III. (1) Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.

(2) Expliciter la bijection g de $\mathbb{R}_+^\times$ dans $\mathbb{R}$, réciproque de la bijection f.

(3) Démontrer l'équivalence :

$$\left[f(x) \in \mathbb{Q}^\times\right] \Leftrightarrow \left[x \in \mathbb{Q} \text{ et } \sqrt{x^2+1} \in \mathbb{Q}\right]$$

(4) En déduire l'ensemble de tous les couples (x, z) de rationnels positifs vérifiant $x^2 + 1 = z^2$.

(5) Soit a un rationnel quelconque; déterminer l'ensemble de tous les couples de rationnels positifs (x, z) vérifiant :

$$x^2 + a^2 = z^2$$

(6) En déduire l'ensemble des triplets (x, y, z) d'entiers naturels vérifiant :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Indication : On pourra remarquer, en le justifiant, que si $\frac{p}{q}$ est un quotient d'entiers, non nul, et irréductible les nombres $\frac{p^2 + \varepsilon q^2}{2pq} \notin \mathbb{N}$ (où $\varepsilon \in \{-1, +1\}$).
On distinguera ensuite selon que p et q sont ou ne sont pas tous les deux impairs.
On pourra facultativement remarquer que le passage d'un cas à l'autre équivaut à l'inversion des rôles de x et e y.