# ISG 1981 Math II

Soit $E$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels, et $\mathcal{F}$ l'application de $E^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathcal{F}(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$

On appellera $E_n$ ($n \in \mathbb{N}$) le sous-espace vectoriel de $E$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$, et du polynôme nul (dont le degré est $-\infty$)

## I

1. Montrre que la restriction de $\mathcal{F}$ à $E_n^2$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $E_n$ et que la forme quadratique associée est définie positive.

   § On dira que deux polynômes $P$ et $Q$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathcal{F}(Q,Q) = 0$

2. Soient $P_0, P_1, ..., P_n, ...$ une suite de polynômes de $E$ dont le degré est égal à l'indice.

   (a) Montrer rapidement que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, il existe un $(n+1)$-uplet unique de $\mathbb{R}^{n+1}$

   $$(\lambda_{n,n}, \lambda_{n,n-1}, ..., \lambda_{n,0})$$

   tel que :

   $$P_n = \lambda_{n,n}x^n + \lambda_{n,n-1}P_{n-1} + \lambda_{n,n-2}P_{n-2} + \cdots + \lambda_{n,1}P_1 + \lambda_{n,0}P_0.$$

   (b) Montrer que la suite des $P_n$ est entièrement déterminée si on lui impose en outre de vérifier les trois conditions suivantes :

   $$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \lambda_{n,n} = 1 \text{ pour tout } n \\ P_l \text{ et } P_k \text{ sont orthogonaux pour } i \neq k \end{cases}$$

   On explicitera $P_1$, $P_2$ et $P_3$ et on donnera une expression simple de $\lambda_{n,k}$ en fonction des $P_l$.

3. Etudier la parité des $P_n$ ainsi définis.

4. Soit $Z_0, Z_1, ..., Z_n, ...$ une autre suite de polynômes de $E$ deux à deux orthogonaux, et dont le degré est égal à l'indice.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad Z_n = z_n P_n$, où $z_n \in \mathbb{R}^{\times}$.

## II

1. Soit $P$ un polynôme quelconque de $E$ et $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Montrer que pour que la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ garde un signe constant sur $[a,b]$, il faut et il suffit que $P$ ne possède aucune racine d'ordre impair appartenant à $]a,b[$.
   Dans toute la suite, les $P_n$ sont ceux définis au **I.**2b.

2. Montrer que $P_n$ est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.

3. On effectue la division euclidienne de $P_{n+1}$ par $P_n$ ($n \neq 0$).
   Soient $Q_n$ et $R_n$ le quotient et le reste obtenus.

   (a) Montrer que $Q_n = P_1$.
   (b) Montrer que $R_n = r_n P_{n-1}$, où $r_n$ est un réel strictement négatif.
   (c) En déduire que si $\alpha$ est une racine réelle de $P_n$, $P_{n-1}(\alpha)$ et $P_{n+1}(\alpha)$ sont non nuls et de signes contraires.

4. Soit $A_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ l'ensemble des racines de $P_n$ qui appartiennent à $]-1,1[$, et qui sont d'ordre impair, $n$ étant ici non nul. On pose $V_n = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$.

   (a) Montrer que $A_n \neq \emptyset$.
   (b) Montrer que $V_n$ et $P_n$ ne sont pas orthogonaux.

5. En déduire de ce qui précède que pour tout $n$, $P_n(1) > 0$ et que le signe de $P_n(-1)$ est celui de $(-1)^n$.

6. Dans cette question, on va montrer par récurrence que les racines de $P_n$ ($n \neq 0$) "séparent" les racines de $P_{n+1}$, ce qui veut dire que l'on a :

$$\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_{n+1}$$

   les $\beta_i$ et les $\alpha_j$ étant respectivement les racines de $P_{n+1}$ et de $P_n$, rangées dans l'ordre croissant.

   (a) Montrer que $P_1$ a la propriété annoncée (i.e. la racine de $P_1$ sépare les racines de $P_2$).
   (b) Soient $\alpha_l$ et $\alpha_{l+1}$, deux racines consécutives de $P_n$. Montrer que si $P_{n-1}$ a la propriété annoncée, $P_{n+1}$ possède au moins une racine dans $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$.
   (c) Montrer que $P_{n+1}$ possède également une racine dans $]-1, \alpha_1[$ et conclure.

## III

Dans cette partie, on se propose de démontrer la propriété $\mathcal{P}$ suivante :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, il existe une suite unique de $n$ couples $(h_i, x_i) \in \mathbb{R}^\times \times ]-1,1[$ telle que, pour tout polynôme $f$ de degré inférieur ou égal à $2n-1$, on ait :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} h_i f(x_i).$$

1. Déduire du **II.**2 que $\mathcal{P}$ ne peut être vraie que si les $x_i$ sont les $n$ racines de $P_n$.

2. Pour $i \in \{1, 2, .., n\}$, soit $H_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \dfrac{x - x_k}{x_i - x_k}$.

   (a) Calculer $H_i(x_j)$.
   (b) En déduire que $\mathcal{P}$ ne peut être vraie que si

$$h_i = \int_{-1}^{1} H_i(x)dx.$$

   (c) Vérifier que les $h_i$ ainsi définis sont bien non nuls, ou, ce qui revient au même, que les $H_i$ ne sont pas orthogonaux à $P_0$.

3. (a) Soit $T_{(n-1)}$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.
Démontrer l'égalité :

$$T_{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} T_{(n-1)}(x_i) H_i$$

(b) Les couples $(h_i, x_i)$ étant ceux qui viennent d'être définis, montrer que tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$ vérifie l'égalité :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} h_i f(x_i)$$

4. Soient $a$ et $b$ deux réels distincts et $f \in E_{2n-1}$. Démontrer qu'il existe un polynôme $\varphi \in E_{2n-1}$ (à déterminer en fonction de $f$, $a$ et $b$) tel que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} h_i \varphi(x_i)$$