ISG 1987 épreuve commune Math II

L'épreuve se compose de trois exercices indépendants

EXERCICE I

X est une variable aléatoire absolument continue suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

1. (a) Quelle est la densité de probabilité de X.
   (b) X admet-elle une espérance ? Si oui, quelle est sa valeur ?
   (c) X admet-elle une variance ? Si oui, quelle est sa valeur ?
2. On pose $Y = X^2$. Mêmes questions (a), (b), (c) qu'en 1.
3. On pose $Z = \tan X$. Mêmes questions (a), (b), (c) qu'en 1.

EXERCICE II

p et q désignent deux réels vérifiant : $0 < p < 1, \quad p + q = 1$.
X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi commune est définie par :

$$P(X = k) = P(Y = k) = pq^k.$$

On définit les deux variables aléatoires U et V par :

$$U = \sup(X, Y) \quad V = \inf(X, Y)$$

1. Quelle est la loi conjointe de U et V, c'est-à-dire préciser, pour tout couple d'entiers (m, n), la probabilité de l'évènement :
$$U = m \text{ et } V = n$$
2. Expliciter les lois marginales de U et V.
3. U et V sont-elles indépendantes ?
4. Quelle est la loi de $U + V$?

EXERCICE III

On rappelle que, pour $|a| < 1, \quad \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.
Les coefficients du binôme seront notés de façon usuelle :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

I désigne l'ensemble des entier naturels compris entre 1 et $n + 1$

QUESTION PRELIMINAIRE

Etablir : $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} C_n^p = 2^n$

NOTATIONS

On donne dans un espace probabilisé deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans l'ensemble I. Pour tout $(i, j) \in I^2$, on pose :

$$a_{i,j} = P(X = i \text{ et } Y = j) \qquad \text{et} \qquad b_{i,j} = P(Y = i / X = j),$$

c'est-à-dire la probabilité conditionnelle de l'évènement $Y = i$ sachant $X = j$.
Enfin B désignera la matrice carrée d'ordre $n + 1$ dont le terme général d'indice i, j est $b_{i,j}$

PREMIERE PARTIE

Dans cette partie, on suppose qu'il existe k tel que

$$\forall (i, j) \in I^2, \qquad a_{i,j} = kC_n^{i-1}C_n^{j-1}$$

1. Montrer que $k = \dfrac{1}{2^{2n}}$.
2. Quelle est la loi de X ? Quelle est la loi de Y ?
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. (a) Reconnaitre la loi de $Z = X - 1$.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.
5. (a) Quels sont les éléments de la matrice B ?
   (b) Calculer B^p pour tout entier p.
   (c) Quelles sont les valeurs propres de B ?

DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie, $a_{i,j}$ vaut k' lorsque $|i + j - n - 2| = 1$ et 0 sinon.

1. En dénombrant le nombres de couples (i, j) tels que $|i + j - n - 2| = 1$, calculer k'.
2. Quelle est la loi de X ? de Y ?
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer les éléments de la matrice B. Ecrire très clairement cette matrice.
5. Dans cette question, $n = 4$. En résolvant un système, montrer que 1 est valeur propre de B et trouver les vecteurs propres correspondants. Trouver les autres valeurs propres.
6. On revient au cas général. Montrer que 1 est valeur propre de B (on pourra chercher un vecteur propre évident en s'aidant d'une interprétation probabiliste).