ISG 1988 Option générale

Le sujet comporte un exercice de probabilité et un problème d'analyse indépendants que les candidats traiteront dans l'ordre de leur choix.

EXERCICE

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \text{ si } t < 0 \text{ et} \\ f(t) &= ke^{-kt} \text{ si } t \geqslant 0 \text{ avec } k \text{ strictement positif.} \end{aligned}$$

   Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X absolument continue.

2. Quelle est la fonction F de répartition de X ?

3. Après en avoir justifier l'existence, calculer les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

4. La durée T, en minutes, d'une communication téléphonique urbaine suit une loi de densité de probabilité f, c'est-à-dire que :

$$P(T \leqslant t) = F(t).$$

   (a) Calculer pour $k = 0,8$ la probabilité pour qu'une communication dure plus de quatre minutes.

   (b) Calculer pour $k = 0,8$ la probabilité pour qu'une communication dure entre 3 et 5 minutes.

   (c) Quelle valeur faut-il donner à k, pour que la probabilité qu'une communication soit supérieure à 3 minutes, soit égale à $\dfrac{1}{10}$.

PROBLEME

Le problème consiste à chercher les fonctions numériques f, définies sur $]0, +\infty[$, et vérifiant la condition (C) :

$$(C) : \forall x > 0, \quad f(x+1) = xf(x)$$

On notera :

$E(x)$ la partie entière de x;
F l'ensemble des fonctions numériques, définies sur $]0, +\infty[$ vérifiant (C);
H l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $]0, +\infty[$.

Pour p entier strictement positif, l'on dira qu'une fonction est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, si elle est p fois dérivable, avec une dérivée $p^{ième}$ continue, sur cet intervalle. On admettra que le produit de deux fonctions de classe C^∞ est de classe C^∞.
Les parties B,C,D du problème sont indépendantes entre elles.
Les candidats pourront utiliser les résultats de la partie A même s'ils ne les ont pas établis

PARTIE A

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H

2. Soit f une fonction de F.
   On appelle θ la restriction de f à $]0,1]$. On gardera cette notation dans toute la suite.

   (a) n étant un entier naturel non nul, calculer $f(n)$ en fonction de $\theta(1)$.

   (b) Donner la valeur de $f(x)$ pour tout $x > 0$ à l'aide de $\theta(x)$ et $n = E(x)$.
   On notera que f est entièrement déterminer par la condition (C) et par sa restriction θ à $]0,1]$.

3. On suppose $f \in F$ et f continue sur $]0,2[$, montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

4. On suppose $f \in F$ et f de classe C^∞ sur $]0,2[$, montrer que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

PARTIE B : RECHERCHE DE FONCTIONS DE F, DONT LA RESTRICTION A $]0,1]$ EST POLYNOME

1. On appelle f_1 la fonction de F, telle que sa restriction à $]0,1]$ est la fonction constante égale à 1.
   Représenter graphiquement, avec une échelle de 2 cl, la fonction f_1 pour $0 < x \leqslant 4$.

2. Dans cette question, on cherche les fonctions f de F dont la restriction θ à $]0,1]$ est donnée par :

$$\theta(x) = ax^2 + bx + c; \quad a \neq 0.$$

   (a) Montrer que l'on peut étudier l'étude au cas $a = 1$, condition que l'on supposera réalisée dans la suite de cette question.

   (b) A quelle condition, portant sur les coefficients b et c, f est-elle continue sur $]0,+\infty[$?

   (c) Montrer que l'on peut trouver b et c de manière que la fonction f de F correspondante soit dérivable sur $]0,+\infty[$.
   Soit f_2 la fonction ainsi trouvée.

   (d) Représenter graphiquement f_2 pour $0 < x \leqslant 2$ avec une échelle de 4 cm.

3. Chercher s'il existe des fonctions f de F, de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, telles que, la restriction θ de f à $]0,1]$ soit un polynôme du troisième degré : $ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad a \neq 0$.

4. Peut-on "énoncer" une généralisation ? (Justifier rapidement la réponse)

PARTIE C : RECHERCHE DE FONCTIONS DE F, DONT LA RESTRICTION A $]0,1]$ EST UNE FONCTION HOMOGRAPHIQUE

Dans cette question, l'on prendre θ définie sur $]0,1]$ par :

$$\theta(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{avec } c \neq 0 \text{ et } ad - bc \neq 0.$$

1. (a) Montrer que l'on peut choisir $c = 1$, sans changer la généralité du problème.

   (b) Montrer alors que l'on peut limiter la recherche des fonctions f de F aux deux cas
   - $a = 1$ d'une part
   - ($a = 0$ et $b = 1$) d'autre part.

   (c) A quelles conditions doit-on satisfaire dans chacun des deux cas ?

2. Définir f sur $]0,2]$.

3. Dans le cas $a = 1$, existe-t-il des fonctions de F :

   (a) continues sur $]0,+\infty[$?
   (b) dérivables sur $]0,+\infty[$?

4. Dans le cas $a=0$, $b=1$, existe-t-il des fonctions de F :
   (a) continues sur $]0,+\infty[$?
   (b) dérivables sur $]0,+\infty[$?

PARTIE D : EXEMPLE D'UNE FONCTION DE CLASSE C^∞ VERIFIANT (C)

1. On pose pour $x>0$

$$w(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

   Montrer que l'intégrale est convergente.

2. A l'aide d'une intégration par parties soigneusement justifiée, établir pour tout $x>0$:

$$w(x+1)=xw(x).$$

REMARQUE

Ainsi, la fonction w appartient à F. On peut établir, il n'est pas demandé aux candidats de la faire, que w est de classe C^∞, c'est-à-dire indéfiniment dérivable, sur $]0,+\infty[$