ISG 1991 Option générale

L'épreuve se compose de 3 parties chacune comprenant un ou deux exercices indépendants.

PARTIE I : ANALYSE

PRELIMINAIRES

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$.
   Montrer que $\int\limits_a^b f(t)\sin(ut)dt$ tend vers 0 lorsque u tend vers $+\infty$.
2. Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par
   $$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0$$
   (a) Montrer que g est continue et dérivable sur $[0, \pi]$.
   (b) Montrer que g est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

PREMIERE PARTIE

1. Montrer que $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}dt$ est absolument convergente.
2. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t}dt$ a une limite quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge

DEUXIEME PARTIE

1. Soit n un entier naturel et soient C et D les deux fonctions définies sur $[0, \pi]$ par
   $$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx \\ D(x) &= \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right]}{2\sin(\frac{x}{2})} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } D(0) = n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
   Montrer que $D = C$.
2. Calculer $\int\limits_0^\pi D(t)dt$.
3. En étudiant $\int\limits_0^\pi g(t)\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right] dt$ à l'aide du préliminaire, montrer que $\int\limits_0^\pi \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{t}dt$ a une limite quand n tend vers $+\infty$.
4. En déduire la valeur de I.

PARTIE II : ALGEBRE LINEAIRE

EXERCICE 1

On considère la matrice M appartenant à l'anneau des matrices carrées d'ordre 4 sur le corps des nombres complexes.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où a_1, a_2, a_3 sont trois complexes tels que $s = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 \neq 0$ et $a_1 \neq 0$.
On désignera par δ une des racines carrées de s.

1. Montrer que 0 est valeur propre et donner deux vecteurs propres associés linéairement indépendants.
2. Montrer qu'il existe deux valeurs propres distinctes de 0 et donner pour chacune d'elles un vecteur propre.
3. M est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 2

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension 4 dont une base B est désignée par e_1, e_2, e_3, e_4.
La matrice M de f dans cette base B est

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $f(e_3)$, $f(e_4)$ sont linéairement indépendants et que :

   $$f(e_1) = f(e_3) + f(e_4).$$

   En déduire une base de l'image $\operatorname{Im} f$ de f.
2. Donner une base du noyau $\ker f$ de f.
3. Calculer M^2 et vérifier que $\ker f = \ker f^2$ (ici $f^2 = f \circ f$).
4. Montrer que $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$ et que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

PARTIE III : PROBABILITES

Une urne contient 32 boules sur lesquelles sont inscrits des numéros allant de 1 à 8 :

4 boule portent le numéro 1
4 boules portent le numéro 2
....
4 boules portent le numéro 8

On tire au hasard sans remise un échantillon de 5 boules.
Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. Quatre boules portant le même numéro et une boule portant un autre numéro ?
2. Trois boules portant le même numéro et deux boules portant des numéros différents et différents du premier ?
3. Trois boules portant le même numéro et deux boules portant des numéros différents et différents du premier ?

4. Deux boules portant le même numéro et trois boules portant des numéros différents entre eux et différents du premier ?

5. Cinq boules portant des numéros différents ?

Après avoir donné les valeurs exactes, avec leurs justifications, on donnera une valeur approchée de ces probabilités à 10^{-4} près, dans un tableau récapitulatif.

EXERCICE 2

On donne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et pour $t \geqslant 0$ par

$$f(t) = \frac{a^k t^{k-1} e^{-at}}{(k-1)!} \text{ pour } k \text{ entier strictement positif et } a > 0.$$

1. Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2. Démontrer l'existence et calculer la valeur de l'espérance de X.

3. Démontrer l'existence et calculer la variance de X.

FIN