

CONCOURS 2001

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques (toutes filières)

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PROBLEME 1

Les parties **A** et **B** sont indépendantes, mais sont utilisées par la partie **C**.

PARTIE A

Pour tout réel a positif ou nul, on note g_a la fonction définie sur \mathbb{R}_+^\times par $g_a(t) = t^a$.

1. Montrer que la fonction g_a est prolongeable par continuité en 0 (on notera toujours g_a la fonction ainsi prolongée, qui est donc définie et continue sur \mathbb{R}_+). Préciser la valeur de $g_a(0)$. Montrer que la fonction g_a est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ pour $a \geq 1$.

Soient a et b deux réels positifs ou nuls. On pose

$$I(a, b) = \int_0^1 g_a(t) g_b(1-t) dt .$$

2. Justifier l'existence de l'intégrale $I(a, b)$. Comparer $I(a, b)$ et $I(b, a)$.

On écrira abusivement $I(a, b) = \int_0^1 t^a(1-t)^b dt$.

3. Soient a et b deux réels positifs ou nuls. Trouver une relation entre $I(a+1, b)$ et $I(a, b+1)$.
4. Calculer $I(a, 0)$. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a

$$I(a, n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2) \cdots (a+n+1)} .$$

5. Soient p et q deux entiers naturels. Exprimer $I(p, q)$ à l'aide de factorielles.
6. En déduire la valeur de l'intégrale

$$J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p+1} (\cos \theta)^{2q+1} d\theta ,$$

où p et q sont deux entiers naturels.

PARTIE B

Pour tout réel a strictement positif, on note f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = x \ln \left(1 - \frac{a}{x} \right).$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f_a .

On note \mathcal{C}_a la courbe représentant la restriction de la fonction f_a à l'intervalle $]a, +\infty[$.

2. Si a et x sont deux réels tels que $0 < a < x$, démontrer l'encadrement

$$\frac{a}{x} \leq \ln x - \ln(x - a) \leq \frac{a}{x - a}.$$

3. En déduire les variations de la fonction f_a sur l'intervalle $]a, +\infty[$ (on dressera un tableau de variations). Préciser la nature des branches infinies de la courbe \mathcal{C}_a .

4. Donner l'allure des courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 sur un même schéma.

5. On fixe $a > 0$ et on considère la suite $y = (y_n)$ définie, pour tout entier naturel n tel que $n > a$, par $y_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$.

Etudier le comportement (sens de variation, limite) de la suite (y_n) .

Partie C

Pour tout réel positif ou nul x et tout entier naturel non nul n , on pose

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x du.$$

1. Montrer que $F_n(x) = n^{x+1} I(x, n)$.
2. En utilisant les résultats de la partie **B**, montrer que, pour tout x fixé, la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. On fixe $x \geq 0$.

(a) Montrer l'existence d'un réel strictement positif U tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad u \geq U \implies e^{-u} \leq \frac{1}{u^{x+2}}.$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a

$$F_n(x) \leq \int_0^U e^{-u} u^x du + \frac{1}{U}.$$

(c) Montrer que la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour tout réel positif ou nul x , on pose $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$.

4. Démontrer la relation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x+1) = (x+1)F(x).$$

En déduire la valeur de $F(k)$ pour k entier naturel.

PROBLEME 2

Les parties **B** et **C** sont liées, mais la partie **A** est indépendante du reste du problème.

On rappelle que, si p est un entier naturel non nul, la notation $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ représente l'algèbre des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels.

Partie A

Soit p un entier naturel non nul. Une matrice A de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente d'indice trois** si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Dans toute cette partie, on note A une matrice de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice trois. On note I la matrice-unité d'ordre p .

Pour tout réel t , on note $E(t)$ la matrice

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

1. Vérifier la relation

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad E(s)E(t) = E(s+t).$$

2. En déduire que $(E(t))^n = E(nt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?

4. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre dans l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$.

5. En déduire que l'application $E : t \mapsto E(t)$, de \mathbb{R} vers $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$, est injective.

6. Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $E(t)$ sous la forme d'un tableau matriciel pour $t \in \mathbb{R}$.

PARTIE B

Dans cette partie, on note $\mathcal{B}_0 = (\vec{te}_1, \vec{te}_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 qui lui est canoniquement associé.

1. Montrer que $F = \ker(f - 2 \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles, supplémentaires dans \mathbb{R}^2 .
Préciser un vecteur directeur \vec{tu} de F , et un vecteur directeur \vec{tv} de G .
2. Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 dans la base $\mathcal{B} = (\vec{tu}, \vec{tv})$.
3. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale (toutes deux carrées d'ordre deux) telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P , D et P^{-1} .
4. Expliciter D^n pour tout entier naturel n . Démontrer la relation $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

Partie C

On reprend les notations de la partie B.

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout réel t , on a

$$e^t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \right).$$

2. Pour tout réel t , pour tout entier naturel n , on note $E_n(t)$ la matrice définie par $E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k$. On

écrira cette matrice sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, avec $a(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(t)$, $b(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(t)$, etc. Expliciter la matrice $E(t)$.

4. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R (carrées d'ordre deux) telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad E(t) = e^{2t} Q + e^t R$$

et expliciter Q et R .

5. Calculer les matrices Q^2 , R^2 , QR , RQ . Que peut-on dire des endomorphismes q et r de \mathbb{R}^2 canoniquement associés aux matrices Q et R (on pourra préciser la réponse en utilisant les droites F et G de la question B.1.) ?

6. En déduire que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad E(s)E(t) = E(s+t).$$

Que dire de $(E(t))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$?, de $(E(t))^{-1}$?

L'application $E : t \mapsto E(t)$, de \mathbb{R} vers $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, est-elle injective ?