1 Exercices

Exercice 1.1

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que toute matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ admet un polynôme annulateur du second degré.

2. Soient a, b deux réels et n un entier naturel non nul. On pose $A_n(a,b) = I_2 + \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
   Calculer $[A_n(a,b)]^n$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} [A_n(a,b)]^n$

Exercice 1.2 Soit $G \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un groupe pour la composition des applications.

1. Montrer que tous les éléments de G ont même rang p.
2. Montrer qu'il existe une base B dans laquelle tout élément de G est représenté par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A \in GL_p(\mathbb{R})$.
3. Montrer l'équivalence des trois propositions qui suivent :
   (a) u appartient à un groupe G du type précédent.
   (b) u et u^2 ont même rang.
   (c) $\mathbb{R}^n$ est somme directe de $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$.

Exercice 1.3 Soient a, b, c trois nombres réels distincts et $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$ définies par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_1(P) = P(a); \quad \varphi_2(P) = P(b); \quad \varphi_3(P) = P(c).$$

1. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre dès que $n \geqslant 2$.
2. Dans le cas $n = 3$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_4 \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ où φ_4 est la forme linéaire $P \mapsto \int\limits_a^b P(t)dt$.
   Déterminer dans ce cas (λ, μ, ν) tel que $\varphi_4 = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3$.
3. Que peut-dire de l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que

$$\varphi_4(P) = \lambda\varphi_1(P) + \mu\varphi_2(P) + \nu\varphi_3(P) \ ?$$

Exercice 1.4 Soit a un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $a^q - I_n = 0$ (avec $q \in \mathbb{N}^\times$).
Montrer que $\dim(\ker(a - I_n)) = \dfrac{1}{q}\sum\limits_{i=1}^{q} \operatorname{tr}(a^i)$.

Exercice 1.5 $E = \mathbb{R}_3[X]$ et a est un réel non nul.

1. Soit $F : P \mapsto (P(-a), P'(-a), P(a), P'(a))$. Montrer que F est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^4$.
2. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$; déterminer $P_i = F^{-1}(e_i)$.
3. Pour P dans E, on pose $g(P) = \int\limits_{-1}^{1} tP(t)dt$. Montrer qu'il existe a_1, a_2, a_3, a_4 uniques tels que, pour tout P dans E,

$$g(P) = a_1P(a) + a_2P(-a) + a_3P'(a) + a_4P'(-a).$$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Soit on connait le résultat, soit on développe brutalement $aA^2 + bA + cI$ avec $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, ce qui fournit quatre équations en a, b, c. Deux possèdent des solutions immédiates (on ne demande pas de résoudre en toute généralité mais d'obtenir une solution) ce qui donne la troisième inconnue.

2. Expliciter le polynôme annulateur P_n de $A_n(a, b)$ ainsi que ses racines. Déterminer le reste R_n de la division euclidienne de X^n par P_n (on évalue la division euclidienne en les deux racines pour déterminer le reste). On obtient ainsi une expression de $A_n(a, b)$ sous la forme
$$A_n(a, b) = \alpha_n(a, b)A_n(a, b) + \beta_n(a, b)I$$
où $\alpha_n(a, b)$ et $\beta_n(a, b)$ sont complexes. Déterminer alors leurs formes polaires (trigonométriques) respectives (pour l'angle polaire, utiliser que $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ puis déterminer exactement la valeur de θ en vérifiant si $\theta \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ ou $]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}[$. Utiliser alors que $\rho_n e^{i\varphi_n}$ converge ssi ρ_n et φ_n converge (si $\varphi_n \in [0, 2\pi]$). Pour déterminer la limite de ρ_n, passer au logarithme et effectuer des DL. Pour φ_n, utiliser les logarithmes.

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Si e désigne l'élément neutre, montrer que les égalités $ge = eg = g$ implique que $\operatorname{rg} g = \operatorname{rg} e$.

2. Utiliser le fait que e est un projecteur (à justifier) pour en donner la réduction, la commutation de g et e implique que les sous-espaces stables par e sont stables par g. Choisir alors une base quelconque de ces deux espaces et donner la forme de la matrice de g dans cette base. Conclure en utilsant le rang.

3. $(a) \Rightarrow (b)$ est immédiat par calcul matriciel.
$(b) \Rightarrow (c)$ utiliser les inclusions évidentes $\ker(u) \subset \ker(u^2)$, $\operatorname{Im}(u^2) \subset \operatorname{Im}(u)$ et le théorème du rang
$(c) \Rightarrow (a)$ donner la matrice de u dans une base adaptée à $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$.

Indication pour l'exercice 1.3 : Soient a, b, c trois nombres réels distincts et $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$ définies par :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_1(P) = P(a); \quad \varphi_2(P) = P(b); \quad \varphi_3(P) = P(c).$$

1. Si une combinaison linéaire de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est nulle, l'évaluer en un polynôme annulant deux des formes linéaires mais pas la troisième.

2. Si $\varphi_4 \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ alors tout polynôme annulant tous les $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ annule φ_4. Choisir un tel polynôme P et calculer explicitement $\varphi_4(P)$ (un changement linéaire simple permet de simplifier un peu le calcul, on n'ésitera pas à factoriser au mieux avant d'effectuer les développements finaux). Cela fournit une condition sur (a, b, c). Pour la réciproque, considérer l'égalité $\varphi_4 = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3$ et l'évaluer en trois polynômes, chacun annulant deux et deux seulement des trois formes linéaires $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$. Oh une belle formule d'analyse numérique, étonnant !

3. Le noyau d'une forme linéaire est un ......

Indication pour l'exercice 1.4 : Introduire la matrice A de a dans une base fixée et diagonaliser A sur $\mathbb{C}$ *(pour ceux qui n'ont pas commencer la réduction des endomorphismes, introduire u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A puis utiliser le théorème des noyaux, choisir une base de chaque espace* $\ker(A-\zeta I)$*, regrouper les bases, écrire la matrice de v dans cette dernière base et utiliser le fait que la trace ne dépend pas de la base).*
En déduire la valeur de $\operatorname{tr}(A^i)$, utiliser ensuite Fubini et se rappeler que $\sum_{k=0}^{n} q^k = \cdots$ (attention à ne pas diviser par 0)

Indication pour l'exercice 1.5 : $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Pour le noyau, on obtient un polynôme admettant .... comme racines, de multiplicité respectives .... donc P est divisible par ..... or P est de degré .....Soit $F : P \mapsto (P(-a), P'(-a), P(a), P'(a))$. Montrer que F est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^4$.

2. Pour chaque i, rechercher les racines de P_i ainsi que leurs multiplicités, il ne reste alors qu'à déterminer un facteur linéaire qu'on obtient à l'aide des deux équations restantes.Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$; déterminer $P_i = F^{-1}(e_i)$.

3. Evaluer la forme en les P_i pour obtenir les a_i puis utiliser le fait que les P_i forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (ce que l'on justifiera).

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors on a recherche deux réels α et β tels que

$$\begin{aligned} A^2 + \alpha A + \beta I_2 &= 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} bc+\beta+a\alpha+a^2 & ab+bd+b\alpha \\ ac+cd+c\alpha & bc+\beta+d\alpha+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} bc+\beta+a\alpha+a^2 &= 0 \\ ab+bd+b\alpha &= 0 \\ ac+cd+c\alpha &= 0 \\ bc+\beta+d\alpha+d^2 &= 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a\alpha+\beta &= -a^2-bc \\ b\alpha &= -b(a+d) \\ c\alpha &= -c(a+d) \\ d\alpha+\beta &= -d^2-bc \end{array} \right. \end{aligned}$$

Puisque l'on recherche deux valeurs possibles de α etβ, on évite de résoudre dans sa grande généralité ce beau système (bien difficile en général car il dispose de 4 paramètres,Ô joie). On constate que si l'on choisit $\alpha = -(a+d) = -\operatorname{tr}(A)$ alors

$$\beta = -a^2 - bc - a(-a-d) = ad - bc = \det(A)$$

Par conséquent, toute matrice

$$A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}), \quad A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0,$$

ce qui signifie que $X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$ est un polynôme annulateur du second degré de A.

2. On se dit pour commencer que l'on demande un polynôme annulateur de A puis on demande de calculer une puissance $n^{ième}$. A mais c'est bien sur : en sup et certainement en spé, on a vu que si A est annulé par un polynôme P, on peut calculer A^n de la façon suivante. Si l'on effectue la division euclidienne de X^n par P, ce qui donne l'écriture $X^n = PQ_n + R_n$ alors $A^n = R_n(A)$.
D'après la question 1), le polynôme $X^2 - (\operatorname{tr}(A_n(a,b))X + \det(A_n(a,b))$ annule $A_n(a,b)$. Or, un calcul direct nous donne

$$\operatorname{tr}(A_n(a,b)) = 2 + \frac{2a}{n} = 2(1+\frac{a}{n}) \quad \det(A_n(a,b)) = \begin{vmatrix} 1+\frac{a}{n} & -\frac{b}{n} \\ \frac{b}{n} & 1+\frac{a}{n} \end{vmatrix} = 1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}$$

donc

$$P_n(X) = X^2 - 2(1+\frac{a}{n})X + 1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}$$

est un polynôme annulateur de $A_n(a,b)$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta_n(a,b) = -\frac{4b^2}{n^2} = (\frac{2ib}{n})^2$ donc P_n admet deux racines complexes conjuguées données par

$$x_n^{(\pm)} = \frac{2(1+\frac{a}{n}) \pm \frac{2ib}{n}}{2} = 1 + \frac{a \pm ib}{n}$$

Evaluons maintenant le reste R_n de la division euclidien de X^n par $P_n(X)$. Puisque P_n est de degré 2, on est assuré que $\deg R_n \leqslant 1$, c'est-à-dire que R_n s'écrit sous la forme $a_nX + b_n$ et l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^n = P_n(X)Q_n(X) + a_nX + b_n$$

En évaluant cette égalité en $X = x_n^{\pm}$, on obtient

$$(S_n) : \left\{ \begin{array}{l} a_nx_n^+ + b_n = (x_n^+)^n \\ a_nx_n^- + b_n = (x_n^-)^n \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_nx_n^+ + b_n = (x_n^+)^n \\ (x_n^- - x_n^+)a_n = (x_n^-)^n - (x_n^+)^n \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_nx_n^+ + b_n = (x_n^+)^n \\ -\frac{2ib}{n}a_n = (x_n^-)^n - (x_n^+)^n \end{array} \right.$$

- Si $b = 0$ alors $A_n(a,b) = I_2 + \frac{1}{n}aI_2 = (1+\frac{a}{n})I_2$, ce qui implique que

$$[A_n(a,b)]^n = (1+\frac{a}{n})^n I_2$$

Il reste maintenant à évaluer $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{a}{n})^n$. C'est une question classique. On constate que l'on a affaire à une suite de la forme $(a_n)^{b_n}$ donc on passe en forme exponentielle :

$$(1+\frac{a}{n})^n = \exp(n\ln(1+\frac{a}{n})).$$

Puisque $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et que $\frac{a}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on obtient que

$$\ln(1+\frac{a}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{n} \Rightarrow n\ln(1+\frac{a}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{a}{n}) = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{a}{n})^n = e^a$$

Nous pouvons dès lors affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}[A_n(a,b)]^n = e^a I_2.$$

- Si $b \neq 0$ alors

$$(S_n) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} a_n x_n^+ + b_n = (x_n^+)^n \\ -\frac{2ib}{n}a_n = (x_n^-)^n - (x_n^+)^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} a_n & = & -\frac{n}{2ib}\left[(x_n^-)^n - (x_n^+)^n\right] \\ b_n & = & (x_n^+)^n + \frac{n}{2ib}\left[(x_n^-)^n - (x_n^+)^n\right]x_n^+ \end{array}\right.$$

Si l'on pose $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, la matrice $A_n(a,b)$ s'écrit alors

$$\begin{aligned}
[A_n(a,b)]^n &= -\frac{n}{2ib}\left[(x_n^-)^n - (x_n^+)^n\right]A_n(a,b) + \left((x_n^+)^n + \frac{n}{2ib}\left[(x_n^-)^n - (x_n^+)^n\right]x_n^+\right)I_2 \\
&= -\frac{n}{2ib}\left[(x_n^-)^n - (x_n^+)^n\right](I_2 + \frac{1}{n}A) + \left((x_n^+)^n + \frac{n}{2ib}\left[(x_n^-)^n - (x_n^+)^n\right]x_n^+\right)I_2 \\
&= \left((x_n^+)^n + \frac{n}{2ib}\left[(x_n^-)^n - (x_n^+)^n\right](x_n^+ - 1)\right)I_2 - \frac{(x_n^-)^n - (x_n^+)^n}{2ib}A \\
&= \left((x_n^+)^n + \frac{n}{2ib}\left[(x_n^-)^n - (x_n^+)^n\right]\frac{a+ib}{n}\right)I_2 - \frac{(x_n^-)^n - (x_n^+)^n}{2ib}A \\
&= \left((x_n^+)^n + \frac{a+ib}{2ib}\left[(x_n^-)^n - (x_n^+)^n\right]\right)I_2 - \frac{(x_n^-)^n - (x_n^+)^n}{2ib}A
\end{aligned}$$

Pour déterminer la limite de $[A_n(a,b)]^n$ nous allons devoir évaluer les limites de $(x_n^+)^n$ et celle de $\frac{(x_n^-)^n - (x_n^+)^n}{2ib}$. Comme x_n^+ et x_n^- sont deux complexes conjugués, il suffit de déterminer la limite de la suite $(x_n^+)^n$. Pour cela, nous allons déjà chercher la forme polaire de x_n^+.

$$|x_n^+| = \sqrt{(1+\frac{a}{n})^2 + (\frac{b}{n})^2} = \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{1/2}$$

Pour son argument, on utilise le fait que si $z = x+iy = re^{i\varphi}$ alors $\tan\varphi = \frac{y}{x}$
(cela évite de résoudre des équations affreuses en cos *et* sin, *mais si le lecteur n'est convaincu, je lui conseille de tester lui-même)*
. Soit φ_n l'argument de $x_n^+ = 1 + \frac{a}{n} + i\frac{b}{n}$, avec $\varphi_n \in]-\pi,\pi[$, on a

$$\tan\varphi_n = \frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}} = \frac{b}{n+a} \Rightarrow \varphi_n = \arctan(\frac{b}{n+a}) \bmod \pi$$

Pour déterminer la valeur précise de φ_n, on utilise d'une part de $\arctan(\frac{b}{n+a}) \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ (par définition de l'arctangente) et que $\arctan(\frac{b}{n+a})$ est du signe de b pour n assez grand (car $\frac{b}{n+a} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b}{n}$ et $\arctan x$ est du signe de x). D'autre part $\frac{b}{n} = \mathrm{Im}(x_n^+) = r_n \sin\varphi_n$ donc $\sin\varphi_n$ est du signe de b.
Si $b > 0$ alors $\sin\varphi_n > 0$ donc $\varphi_n \in]0,\pi[$ et $\arctan(\frac{b}{n+a}) > 0$ pour n assez grand donc $\arctan(\frac{b}{n+a}) \in]0,\frac{\pi}{2}[$, ce qui implique que $\varphi_n = \arctan(\frac{b}{n+a})$ (car $\arctan(\frac{b}{n+a}) \pm \pi$ n'appartient pas à $]0,\pi[$)
Si $b < 0$ alors $\sin\varphi_n < 0$ donc $\varphi_n \in]-\pi,0[$ et $\arctan(\frac{b}{n+a}) < 0$ pour n assez grand donc $\arctan(\frac{b}{n+a}) \in]-\frac{\pi}{2},0[$, ce qui implique que $\varphi_n = \arctan(\frac{b}{n+a})$ pour n assez grand (car $\arctan(\frac{b}{n+a}) \pm \pi$ n'appartient pas à $]-\pi,0[$).
Par conséquent, quel que soit le signe de b, on a montré que, pour n assez grand, $\arg x_n^+ = \arctan(\frac{b}{n+a})$. Nous obtenons donc l'écriture polaire de x_n^+ puis celle de $(x_n^+)^n$

$$x_n^+ = \left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{1/2}\exp(i\arctan(\frac{b}{n+a})), \qquad (x_n^+)^n = \left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{n/2}\exp(in\arctan(\frac{b}{n+a}))$$

Ensuite, puisque $\arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et que $\dfrac{b}{n+a} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on a :

$$\arctan(\frac{b}{n+a}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b}{n+a} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b}{n} \Rightarrow n\arctan(\frac{b}{n+a}) \underset{n\to+\infty}{\sim} b \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n\arctan(\frac{b}{n+a}) = b$$

et d'autre part puisque $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\dfrac{2a}{n} + \dfrac{a^2+b^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on a :

$$\begin{aligned} &\ln(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2a}{n} \Rightarrow \frac{n}{2}\ln(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} a \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+o} \frac{n}{2}\ln(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}) = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \exp(\frac{n}{2}\ln(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})) = \exp(a) \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp(a) \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n^+)^n = \exp(a)\exp(ib) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(x_n^-)^n = \lim_{n\to+\infty}\overline{(x_n^+)^n} = \overline{\lim_{n\to+\infty}(x_n^+)^n} = \overline{\exp(a)\exp(ib)} = \exp(a)\exp(-ib),$$

ce qui nous fournit la limite de $(A_n(a,b))^n$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}(A_n(a,b))^n &= \left(e^a e^{ib} + \frac{a+ib}{2ib}\left[e^a e^{-ib} - a^a e^{ib}\right]\right) I_2 - \frac{e^a e^{-ib} - e^a e^{ib}}{2ib} A \\ &= e^a\left[\left(e^{ib} - (a+ib)\frac{\sin b}{b}\right) I_2 + \frac{\sin b}{b} A\right] = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On remarque que lorsque $b=0$, $e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} = e^a I_2$.
Conclusion : pour tous réels a et b, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(I_2 + \frac{1}{n}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right)^n = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 1.2 :

1. *Rappelons que si u et v sont deux endomorphismes d'un même espace vectoriel de dimension finie E alors*

$$\mathrm{rg}(u\circ v) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$$

Cela résulte simplement des inclusions ensembles suivantes : $\mathrm{Im}(u\circ v) \subset \mathrm{Im}(u)$ *et* $\ker v \subset \ker(u\circ v)$.
Soit e l'élément neutre de G pour la multiplication (et $e \neq \mathrm{Id}$ à priori car G est inclu dans $\mathcal{L}(E)$ et non dans $GL(E)$, penser à $G = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^\times\}$ qui est clairement un groupe pour la multiplication des matrices et dont l'élément neutre est $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$)
Soit g un élément de G (donc g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$) alors, par définition de l'élément neutre, on a

$$\forall g \in G, \quad g\circ e = g$$

ce qui implique que

$$\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(g\circ e) \leqslant \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(e)) \leqslant \mathrm{rg}(e) \Rightarrow (1) : \forall g \in G, \quad \mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(e)$$

donc tout élément g de G a un rang moindre que le rang de l'élément neutre e. D'autre part, G étant un groupe, tout élément g de G admet un inverse g^{-1} qui appartient à G et qui vérifie $e = g\circ g^{-1}$ donc

$$\mathrm{rg}(e) \leqslant \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(g^{-1})) \leqslant \mathrm{rg}(g) \Rightarrow (2) : \forall g \in G, \quad \mathrm{rg}(e) \leqslant \mathrm{rg}(g)$$

c'est-à-dire que le rang de tout élément g de G est supérieur ou égal au rang de e. Les inégalités (1) et (2) nous donne l'égalité (3)

$$(3) : \forall g \in G, \quad \mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(e),$$

donc tous les éléments de g ont le même rang : celui de l'élément neutre e.

2. Nous allons de nouveau utiliser l'élément neutre e de G (qui est clairement un élément central de notre histoire). Puisque e est un élément neutre de G, il vérifie l'égalité remarquable $e^2 = e$. Mais comme e est également un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, l'égalité précédente montre que e est un projecteur de $\mathbb{R}^n$. La caractérisation des projecteur montre que $\mathbb{R}^n$ est la somme directe de $\ker(e)$ et $\mathrm{Im}(e)$ et que $\mathrm{Im}(e) = \ker(e - \mathrm{Id})$, nous en déduisons l'égalité remarquable :

$$\mathbb{R}^n = \ker(e) \oplus \mathrm{Im}(e) = \ker(e) \oplus \ker(e - \mathrm{Id})$$

Ensuite, puisque tout élément g de G commute avec e et puisque g et e sont des endomorphismes, nous obtenons que les espaces propres de e sont stables par tout élément de g, c'est-à-dire que

$$g(\ker(e)) \subset \ker(e) \quad \text{et} \quad g(\ker(e - \mathrm{Id})) \subset \ker(e - \mathrm{Id}).$$

Si l'on choisit une base $\mathcal{B}_0$ de $\ker(e)$ et une base $\mathcal{B}_1$ de $\ker(e - \mathrm{Id})$, le fait que $\mathbb{R}^n = \ker(e) \oplus \ker(e - \mathrm{Id})$ implique que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de tout élément g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \scriptstyle\ker(e-\mathrm{Id}) & \scriptstyle\ker(e) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ker(e - \mathrm{Id}) \\ \ker(e) \end{array} \end{array},$$

où A_g est une matrice carrée. En particulier, si g est l'élément neutre e de G, le fait que $e_{|\ker(e-\mathrm{Id})} = \mathrm{Id}_{\ker(e-\mathrm{Id})}$ et $e_{|\ker(e)} = 0_{\ker(e)}$ permet d'expliciter la matrice de e dans la base $\mathcal{B}$:

$$mat_{\mathcal{B}}(e) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } p = \dim(\ker(e - \mathrm{Id})) = \mathrm{rg}(e)$$

Montrons pour finir que A_g est une matrice inversible dans $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$.
Soit g un élément de G. Puisque G est un groupe, g admet un inverse h dans G, c'est-à-dire que

$$g \circ h = h \circ g = e.$$

En passant à leurs matrices respectives dans la base $\mathcal{B}$, on obtient

$$\begin{aligned} & mat_{\mathcal{B}}(g) \times mat_{\mathcal{B}}(h) = mat_{\mathcal{B}}(h) \times mat_{\mathcal{B}}(g) = mat_{\mathcal{B}}(e) \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_g & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & A_g A_h = A_h A_g = I_p \end{aligned}$$

ce qui démontre que $A_g \in GL_p(\mathbb{R})$

3. Montrons les équivalences en montrant successivement que $a) \Rightarrow b)$, $b) \Rightarrow c)$, $c) \Rightarrow a)$

$a) \Rightarrow b)$ Puisque u appartient à un groupe multiplicatif G inclu dans $\mathcal{L}(E)$, les éléments u et u^2 sont dans G. La question 1) montre qu'ils ont même rang.

$b) \Rightarrow c)$ Nous avons pour commencer les inclusions ensemblistes

$$(1) : \ker(u) \subset \ker(u^2) \text{ et } \mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u).$$

En passant au rang et en utilisant le théorème du rang, on obtient que

$$\begin{aligned} & [n - \mathrm{rg}(u) \leqslant n - \mathrm{rg}(u^2) \text{ et } \mathrm{rg}(u^2) \leqslant \mathrm{rg}(u)] \Leftrightarrow [\mathrm{rg}(u^2) \leqslant \mathrm{rg}(u) \text{ et } \mathrm{rg}(u^2) \leqslant \mathrm{rg}(u)] \Leftrightarrow \mathrm{rg}(u^2) = \mathrm{rg}(u) \\ (2) : \quad & \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}\, u^2) = \dim(u) \Leftrightarrow n - \dim(\mathrm{Im}(u^2)) = n - \dim(\mathrm{Im}(u)) \Leftrightarrow \dim\ker(u^2) = \dim\ker(u) \end{aligned}$$

Puisque $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et $\dim\ker(u) = \dim\ker(u^2)$, on en déduit que

$$\ker(u) = \ker(u^2)$$

et par le même procédé, on obtient que

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2).$$

Montrons que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont en somme directe. Soit y un élément de $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Alors $u(y) = 0$ et il existe un élément x de E tel que $y = u(x)$, ce qui nous permet d'écrire

$$u(u(x)) = 0 \Leftrightarrow u^2(x) = 0$$

donc $x \in \ker(u^2) = \ker(u)$. On en déduit que $y = u(x) = 0$ donc $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$ et $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont bien en somme directe. D'autre part, nous disposons de l'inclusion

$$\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}^n$$

et la dimension de $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ est égale à

$$\dim \ker(u) + \dim \mathrm{Im}(u) = n = \dim \mathbb{R}^n$$

(d'après le théorème du rang), ce qui nous permet d'affirmer que

$$\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^n$$

c) $\Rightarrow$ *a)* Fixons une base $\mathcal{B}_0$ de $\ker(u)$ et une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Im}(u)$. Le fait que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont en somme directe implique que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de u dans cette base est de la forme

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle\mathrm{Im}(u) & \scriptstyle\ker(u) \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \mathrm{Im}(u) \\ \ker(u) \end{array}$$

Or nous avons les égalités

$$\left(\mathrm{rg}(mat_{\mathcal{B}}(u)) = \mathrm{rg}(u) \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}(A)\right) \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u).$$

Si l'on note $p = \mathrm{rg}(u)$, la matrice A est de taille $\dim \mathrm{Im}(u) = \mathrm{rg}(u) = p$ et son rang est p donc $A \in GL_p(\mathbb{R})$. Si l'on note G' l'ensemble suivant

$$G' = \{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \in GL_p(\mathbb{R})\}.$$

Montrons que G' est un groupe pour la multiplication de matrices.

- <u>G' est non vide</u> : $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G'$.
- <u>G' est stable par produit</u> : Si X_1 et X_2 sont deux éléments de G' alors il existe deux matrices B_1 et B_2 de $GL_p(\mathbb{R})$ telles que pour

  $$i = 1, 2, \quad X_i = \begin{pmatrix} B_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Le calcul matriciel par bloc montre que $X_1 X_2 = \begin{pmatrix} B_1 B_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et comme $B_1 B_2 \in GL_p(\mathbb{R})$, on en déduit que $X_1 X_2 \in G'$
- <u>Le produit est associatif</u> : cela résulte que le produit des matrices est associatif
- <u>Le produit admet un élément neutre</u> : Si l'on considère la matrice $E = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\forall \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G'$,

  $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} BI_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_pB & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  ce qui montre que E est l'élément neutre de G'
- <u>Tout élément de G' admet un inverse</u> : Soit $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G'$. Par définition $B \in GL_p(\mathbb{R})$,donc $B^{-1} \in GL_p(\mathbb{R})$ et la matrice $\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à G'. Pour finir, les égalités

  $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} BB^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E \\ \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B^{-1}B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

  montre que $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet un inverse dans G' qui est la matrice $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui achève la preuve que G' est un groupe pour la multiplication des matrices.

Si l'on note G l'ensemble
$$G = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } mat_{\mathcal{B}}(g) \in G'\},$$
où rappelons-le $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ est la base définitie au début de la question, alors G est un groupe pour la composition des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ (la preuve est laissée au soin du lecteur, elle utilise essentiellement le fait que $mat_{\mathcal{B}}(g \circ h) = mat_{\mathcal{B}}(g) \times mat_{\mathcal{B}}(h)$) et par construction $mat_{\mathcal{B}}(u) \in G'$ donc $u \in G$.

Correction de l'exercice 1.3 :

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que
$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \varphi_i = 0 \Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \varphi_i(P) = 0 \Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \lambda_1 P(a) + \lambda_2 P(b) + \lambda_3 P(c) = 0 \quad (1)$$
L'idéal pour résoudre ce genre d'équation est de choisir des valeurs convenables de P pour deux des trois termes soient nuls et que le terme restant ne soit pas nu. Par exemple, on cherche P tel que $P(a) \neq 0$ et $P(b) = P(c) = 0$. Cette condition signifie que b et c sont des racines de P et comme ces deux réels sont distincts, cela signifie que P est divisible par $(X-b)(X-c)$. On constat que si $n \geqslant 2$ alors le polynôme $P_1(X) = (X-b)(X-c)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et que $P_1(a) \neq 0$, $P_1(b) = P_1(c) = 0$. En évaluant l'égalité (1) en $P = P_1$, on obtient
$$\lambda_1 \underbrace{(a-b)(a-c)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$
Par le même procédé, on est amené à considérer les polynômes $P_2(X) = (X-a)(X-c)$ et $P_3(X) = (X-a)(X-c)$. En évaluant l'égalité (1) en $P = P_2$ puis en $P = P_3$, on aboutit aux égalités $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qui implique que la famille $(\varphi_i)_{i \in [\![1,3]\!]}$ est libre.

2. Analyse : Supposons que $\varphi_4 \in \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, cela signifie qu'il existe trois constantes réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ telles
$$\begin{aligned} \varphi_4 &= \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 \Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi_4(P) = \lambda_1 \varphi_1(P) + \lambda_2 \varphi_2(P) + \lambda_3 \varphi_3(P) \\ &\Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \int_a^b P(t)dt = \lambda_1 P(a) + \lambda_2 P(b) + \lambda_3 P(c) \quad (1) \end{aligned}$$
Existe-t–il un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ s'annulant en $a; b$ et c ? Réponse oui, il s'agit du polynôme $P = (X-a)(X-b)(X-c)$ (et tout autre polynôme est un multiple de celui ci). Dans ce cas, l'égalité (1) évaluée en $P = (X-a)(X-b)(X-c)$ nous donne l'égalité
$$(2) \qquad \int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)dt = 0$$
Un changement de variable naturel est $u = t - a$, ce qui nous permet de calculer l'intégrale $\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)dt$:
$$\begin{aligned} \int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)dt &= \int_0^{b-a} t(t+a-b)(t+a-c)dt = \int_0^{b-a} t(t^2 + (2a-b-c)t + (a-b)(a-c))dt \\ &= \int_0^{b-a} t^3 + (2a-b-c)t^2 + (a-b)(a-c)tdt \\ &= \frac{(b-a)^4}{4} + (2a-b-c)\frac{(b-a)^3}{3} + (a-b)(a-c)\frac{(b-a)^2}{2} \\ &= \frac{(b-a)^3}{12}\left[3(b-a) + 4(2a-b-c) - 6(a-c)\right] \\ &= \frac{(b-a)^3}{12}(2c-b-a) \end{aligned}$$
L'égalité (2) nous donne alors
$$\frac{(b-a)^3}{12}(2c-b-a) = 0 \underset{b \neq a}{\Leftrightarrow} 2c - a - b = 0 \Leftrightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

Par conséquent, pour que $\varphi_4 \in \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, il est indispensable que $c = \dfrac{a+b}{2}$, c'est-à-dire que c soit le milieu du segment $[a, b]$.

Synthèse : Supposons maintenant que $c = \dfrac{a+b}{2}$ et montrons que $\varphi_4 \in \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, où

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi_3(P) = P(\frac{a+b}{2}).$$

On introduit le polynôme R défini par : $R(X) = (X-a)(X-b)(X - \dfrac{a+b}{2})$. Les calculs menés dans l'analyse montrent que $\varphi_4(R) = 0$ et par définition de R, $\varphi_1(R) = \varphi_2(R) = \varphi_3(R) = 0$. Par conséquent, le polynôme R vérifie :

$$(3) \qquad \varphi_4(R) = 0 = \varphi_1(R) = \varphi_2(R) = \varphi_3(R)$$

- Montrons que $\varphi_4 \in \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3 donc son dual $(\mathbb{R}_2[X])^*$ (espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$) est également de dimension 3. La question 1) montre que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre dans $(\mathbb{R}_2[X])^*$ et elle est de cardinal 3 c'est une base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$. L'application $\varphi_4 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ donc elle peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, ce qui signifie qu'il existe trois constantes réelles λ, μ, ν telles que

$$(4) \qquad \forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi_4(P) = \lambda\varphi_1(P) + \mu\varphi_2(P) + \nu\varphi_3(P) = \lambda P(a) + \mu P(b) + \nu P(\frac{a+b}{2})$$

Cette égalité signifie que $\varphi_4 = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3$ sur $\mathbb{R}_2[X]$ donc $\varphi_4 \in \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$

- Montrons que $\varphi_4 \in \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.
Puisque le polynôme R n'appartient à $\mathbb{R}_2[X]$, les espaces vectoriels $\mathbb{R}_2[X]$ et $\text{Vect}(R)$ sont en somme directe et leur somme est incluse dans $\mathbb{R}_3[X]$. Puisque l'on a les égalités

$$\dim \mathbb{R}_3[X] = 4 \text{ et } \dim(\mathbb{R}_2[X] \oplus \text{Vect}(R)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) + \dim \text{Vect}(R) = 3 + 1 = 4,$$

on obtient la somme directe

$$\mathbb{R}_3[X] = \mathbb{R}_2[X] \oplus \text{Vect}(R)$$

Soit $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et une constante réelle λ telle que $Q = P + \alpha R$. Cette égalité combinée aux égalités (3) et (4) nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
\varphi_4(Q) &= \varphi_4(P) + \alpha\underbrace{\varphi_4(R)}_{=0} = \lambda P(a) + \mu P(b) + \nu P(\frac{a+b}{2}) \\
&= \lambda P(a) + \mu P(b) + \nu P(\frac{a+b}{2}) + \alpha(\lambda\underbrace{R(a)}_{=0} + \mu\underbrace{R(b)}_{=0} + \nu\underbrace{R(\frac{a+b}{2})}_{=0}) \\
&= \lambda(P + \lambda R)(a) + \mu(P + \lambda R)(b) + \nu(P + \lambda R)(\frac{a+b}{2}) \\
&= \lambda Q(a) + \mu Q(b) + \nu Q(\frac{a+b}{2}) = \lambda\varphi_1(Q) + \mu\varphi_2(Q) + \nu\varphi_3(Q)
\end{aligned}$$

Nous venons donc de montrer que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi_4(Q) = \lambda\varphi_1(Q) + \mu\varphi_2(Q) + \nu\varphi_3(Q) \Leftrightarrow \varphi_4 = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3 \qquad (5)$$

ce qui implique que $\varphi_4 \in \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$

- Explicition les (λ_i). Il suffit d'évaluer l'égalité (5) en $P = (X-b)(X - \dfrac{a+b}{2})$, en $P = (X-a)(X - \dfrac{a+b}{2})$ puis en $P = (X-a)(X-b)$. On évalue pour commener trois intégrales :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (t-b)(t - \frac{a+b}{2})dt &= \int_{a-b}^0 u(u + b - \frac{a+b}{2})du \quad (u = t-b) = \int_{a-b}^0 (u^2 + \frac{b-a}{2}u)du = \frac{(b-a)^3}{12} \\
\int_a^b (t-a)(t - \frac{a+b}{2})dt &= \int_0^{b-a} u(u + a - \frac{a+b}{2})du \quad (u = t-a) = \int_0^{b-a} (u^2 + \frac{a-b}{2}u)du = \frac{(b-a)^3}{12} \\
\int_a^b (t-a)(t-b)dt &= \int_0^{b-a} u(u + a - b)du \quad (u = t-a) = \int_0^{b-a} (u^2 + (a-b)u)du = -\frac{(b-a)^3}{6}
\end{aligned}$$

l'égalité (5) évaluée en les trois polynômes sus-cités nous fournit les égalités suivantes (on n'oublie pas que $c = \frac{a+b}{2}$) :

$$\begin{aligned}
\frac{(b-a)^3}{12} &= \lambda(a-b)(a-\frac{a+b}{2}) \Leftrightarrow \frac{(b-a)^3}{12} = \lambda\frac{(b-a)^2}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{6}(b-a) \\
\frac{(b-a)^3}{12} &= \mu(b-a)(b-\frac{a+b}{2}) \Leftrightarrow \frac{(b-a)^3}{12} = \mu\frac{(b-a)^2}{2} \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{6}(b-a) \\
-\frac{(b-a)^3}{6} &= \nu(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b) \Leftrightarrow -\frac{(b-a)^3}{6} = -\nu\frac{(b-a)^2}{4} \Leftrightarrow \nu = \frac{2}{3}(b-a)
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors affirmer que

$$\begin{aligned}
\forall P &\in \mathbb{R}_3[X], \quad \int_a^b P(t)dt = \frac{1}{6}(b-a)P(a) + \frac{1}{6}(b-a)P(b) + \frac{2}{3}(b-a)P(\frac{a+b}{2}) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b P(t)dt = \frac{1}{6}(P(a)+P(b)+4P(\frac{a+b}{2}))
\end{aligned}$$

Me', ceti pas la bonne vieille formule de Simpson du calcul numérique ?!!? Hé, bé, j'lu pas cru si on m'lu di ! : =)

3. Notons E l'ensemble recherché. On constate que E s'écrit aussi

$$E = \ker(\varphi_4 - \lambda\varphi_1 - \mu\varphi_2 - \nu\varphi_3)$$

Ensuite, le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ si la forme linéaire n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}_n[X]$ ou c'est $\mathbb{R}_n[X]$ si la forme linéaire est identiquement nulle.
Si $n = 3$, la forme linéaire $\varphi_4 - \lambda\varphi_1 - \mu\varphi_2 - \nu\varphi_3$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_3[X]$ (c'est la question 2) et l'ensemble cherchée est $\mathbb{R}_3[X]$.
Si $n \geqslant 4$, montrons que la forme linéaire $\varphi_4 - \lambda\varphi_1 - \mu\varphi_2 - \nu\varphi_3$ n'est pas identiquement nulle. Il suffit de l'évaluer en $P = X^4$

$$\begin{aligned}
(\varphi_4 - \lambda\varphi_1 - \mu\varphi_2 - \nu\varphi_3)(X^4) &= \frac{b^5-a^5}{5(b-a)} - \frac{1}{6}(a^4+b^4+4(\frac{a+b}{2})^4) \\
&= \frac{1}{5}(b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4) - \frac{1}{6}(a^4+b^4+4(\frac{a+b}{2})^4) \\
&= \frac{1}{30}ab^3 - \frac{1}{120}b^4 - \frac{1}{120}a^4 + \frac{1}{30}a^3b - \frac{1}{20}a^2b^2 \\
&= -\frac{(b-a)^4}{120} \neq 0
\end{aligned}$$

donc E est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction de l'exercice 1.4 : On peut traiter cet exercice selon deux méthodes

- Première méthode :
L'endomorphisme a de $\mathbb{R}^n$ possède le polynôme $X^q - 1$ comme polynôme annulateur. Malheureusement ce polynôme n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ mais il est scindé sur $\mathbb{C}$. Nous allons en fait nous ramener à $\mathbb{C}$ par l'astuce suivante (c'est un peu plus qu'une astuce, c'est une méthode pour passer du champs des réels au champs des complexes).
Considérons la base canonique $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}^n$ et notons A la matrice de a dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $A = mat(a, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. La matrice A est à coefficients réels donc elle peut être vue comme une matrice à coefficients complexes. Considérons alors la base canonique $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}^n$ et notons b l'unique endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que $A = mat(b, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$. L'endomorphisme b admet $X^q - 1$ comme polynôme annulateur puisque

$$mat(b^q, \mathcal{B}_{\mathbb{C}}) = (mat(b, \mathcal{B}_{\mathbb{C}}))^q = A^q = (mat(a, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}))^q = mat(a^q, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = mat(\mathrm{Id}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = I_n \Rightarrow b^q = \mathrm{Id}$$

(et on est sauvé car la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est la même que celle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
Si l'on a fait le cours sur la diagonalisation : Le polynôme $X^q - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (donc b est diagonalisable sur $\mathbb{C}$) et ses racines sont des racines $q^{ième}$ de l'unité.

Si l'on n'a pas fait le cours sur la diagonalisation mais si l'on connait le théorème des noyaux :
Le polynôme $X^q - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et sa décomposition est donnée par

$$X^q - 1 = \prod_{k=0}^{q-1}(X - \exp(\frac{2i\pi k}{q})$$

Le théorème des noyau montre que l'on a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=0}^{q-1} \ker(b - \exp(\frac{2i\pi k}{q})\,\mathrm{Id})$$

Considérons pour chaque $k \in [\![0, q-1]\!]$, une base $\mathcal{B}_k$de $\ker(b - \exp(\frac{2i\pi k}{q})\,\mathrm{Id})$ lorsque $\ker(b - \exp(\frac{2i\pi k}{q})\,\mathrm{Id}) \neq \{0\}$.
Alors, la somme précédente étant directe, la réunion des $\mathcal{B}_k$ forment une base $\mathcal{B}'_{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}^n$.
La suite est pour tout le monde :
Pour tout entier $k \in [\![0, q-1]\!]$, notons $\zeta_k = \exp(\frac{2i\pi k}{q})$. Il est de notoriété publique que l'ensemble des racines $q^{ième}$ de l'unité est l'ensemble $\{\zeta_k, \quad k \in [\![0, q-1]\!]\}$. Notons r_k la multiplicité de ζ_k dans b, autrement dit

$$r_k = \dim_{\mathbb{C}} \ker(b - \zeta_k) = \dim_{\mathbb{C}} E_{\zeta_k}(b),$$

l'entier r_k pouvant bien entendu être nul, ce qui arrive lorsque ζ_k n'est pas valeur propre de A.
Le fait que b soit diagonalisable et que ses valeurs soient des racines $q^{ième}$ de l'unité montre l'existence d'une base $\mathcal{B}'_{\mathbb{C}}$ (réunion des $\mathcal{B}_k$ pour ceux qui n'on pas fait la diagonalisation) de $\mathbb{C}^n$ telle que

$$mat(b, \mathcal{B}'_{\mathbb{C}}) = \begin{pmatrix} \zeta_0 I_{r_0} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \zeta_{q-1} I_{r_{q-1}} \end{pmatrix},$$

ce qui nous assure que

$$mat(b^i, \mathcal{B}'_{\mathbb{C}}) = \begin{pmatrix} (\zeta_0)^i I_{r_0} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & (\zeta_{q-1})^i I_{r_{q-1}} \end{pmatrix}$$

La trace d'un endomorphisme ne dépendant pas de la base choisie et étant la trace de sa matrice dans une base quelconque, on en déduit que

$$\mathrm{tr}(A^i) = \mathrm{tr}(b^i) = (\zeta_0)^i \,\mathrm{tr}(I_{r_0}) + \cdots + (\zeta_{q-1})^i \,\mathrm{tr}(I_{r_{q-1}}) = (\zeta_0)^i r_0 + \cdots + (\zeta_{q-1})^i r_{q-1} = \sum_{p=0}^{q-1} (\zeta_p)^i r_p$$

Nous pouvons alors écrire

$$\sum_{i=1}^{q} \mathrm{tr}(A^i) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{p=0}^{q-1} (\zeta_p)^i r_p \underset{\text{Fubini}}{=} \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{q} (\zeta_p)^i r_p = \sum_{p=0}^{q-1} r_p \sum_{i=1}^{q} (\zeta_p)^i$$

Il nous reste à évaluer les sommes $\sum\limits_{i=1}^{q} (\zeta_p)^i$, où rappelons-le ζ_p est une racine $q^{ième}$ de l'unité.
Si $p = 0$ alors $\zeta_0 = 1$ et $\sum\limits_{i=1}^{q} (\zeta_0)^i = \sum\limits_{i=1}^{q} 1 = q$.
Si $p \in [\![1, q-1]\!]$ alors $\zeta_p \neq 1$ et l'on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{q} (\zeta_p)^i &= (\zeta_p)^1 + (\zeta_p)^2 + \cdots + (\zeta_p)^{q-1} + (\zeta_p)^q = (\zeta_p)^1 + (\zeta_p)^2 + \cdots + (\zeta_p)^{q-1} + 1 \\ &= 1 + (\zeta_p)^1 + (\zeta_p)^2 + \cdots + (\zeta_p)^{q-1} = \frac{1 - (\zeta_p)^q}{1 - \zeta_p} = \frac{1-1}{1 - \zeta_p} = 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons naturellement que

$$\sum_{i=1}^{q} \mathrm{tr}(A^i) = r_0 \sum_{i=1}^{q} (\zeta_0)^i = r_0 q \Leftrightarrow \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} \mathrm{tr}(A^i) = r_0 = \dim_{\mathbb{C}} \ker(b - \mathrm{Id})$$

Nous avons presque l'égalité demandée. Il suffit de se rappeler le lien entre matrice et endomorphisme.
On rappelle que la matrice de b dans la base canonique $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^n}$ de $\mathbb{C}^n$ est la matrice A. Soit $x = (x_1, .., x_n)$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$, X sa matrice des coordonnées dans la base canonique. Par définition, on a $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et le vecteur formé des coordonnées de $b(x)$ est simplement la matrice colonne AX. Par conséquent, les égalités $b(x) = x$ et $AX = X$ sont équivalentes, en fait on a même un isomorphisme de $\ker(b - \mathrm{Id})$ sur $\ker(A - \mathrm{Id})$ donné par $x \to X$, ce qui implique que

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker(b - \mathrm{Id}) = \dim_{\mathbb{C}} \ker(A - I_n)$$

Ensuite, $n - \dim_{\mathbb{C}} \ker(A - I_n)$ représente le rang dans $\mathbb{C}^n$ des vecteurs colonnes de $A - I_n$, $n - \dim_{\mathbb{R}}(\ker(A - I_n)$ représente le rang dans $\mathbb{R}^n$ des vecteurs colonnes de $A - I_n$. Puisque $A - I_n$ est à coefficients réels, ses vecteurs colonnes sont à coordonnées réelles et le rang d'une famille de vecteurs à coordonnées réels est le même dans $\mathbb{R}^n$ (vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel) ou dans $\mathbb{C}^n$ (vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel) (la preuve se trouve dans la remarque ci-dessous)
Par conséquent, on a

$$n - \dim_{\mathbb{C}} \ker(A - I_n) = n - \dim_{\mathbb{R}}(\ker(A - I_n) \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}} \ker(A - I_n) = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(A - I_n)$$

et puisque A est la matrice de a dans la base canonique $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}^n$, nous obtenons la formule tant attendue

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker(A - I_n)) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} \mathrm{tr}(A^i) \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\ker(a - I_n)) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} \mathrm{tr}(a^i).$$

Remarque : Le rang d'une famille étant le plus grand nombre de vecteurs libres d'une famille, il suffit de montrer que toute famille de vecteurs $(f_1, .., f_p)$ ***à coordonnées réelles*** *est libre sur $\mathbb{C}$ ssi elle est libre sur $\mathbb{R}$.*
Si $(f_1, .., f_p)$ est libre sur $\mathbb{C}$, et soient $\lambda_1, .., \lambda_p$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0$. Les λ_i étant réels, on peut les considérer comme des complexes et l'égalité précédente fournit une relation de dépendance linéaires de f_i sur $\mathbb{C}$. Ces derniers étant libres sur $\mathbb{C}$, cela implique que tous les λ_i sont nuls donc la famille $(f_1, .., f_p)$ est libre sur $\mathbb{R}$.
Si $(f_1, .., f_p)$ est libre sur $\mathbb{R}$, et soient $\lambda_1, .., \lambda_p$ des complexes tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0$. En passant aux coordonnées, en tenant compte que les coordonnées de f_i sont réelles et en séparant les parties réelles et imaginaires des λ_i, on aboutit à deux systèmes équivalents à $\sum_{i=1}^{p} \underbrace{\mathrm{Re}(\lambda_i)}_{\in\mathbb{R}} f_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{p} \underbrace{\mathrm{Im}(\lambda_i)}_{\in\mathbb{R}} f_i = 0$. Ces deux égalités sont des relations de dépendance linéaire sur R des f_i. Ces derniers étant libres sur $\mathbb{R}$, cela implique que tous les $\mathrm{Re}(\lambda_i)$ et $\mathrm{Im}(\lambda_i)$ sont nuls. On en déduit immédiatement que tout les λ_i sont nuls, ce qui démontre que la famille $(f_1, .., f_p)$ est libre sur $\mathbb{C}$.

- Deuxième méthode (pour ceux qui aiment les groupes) :
  On introduit l'endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$p = \frac{1}{q}(\mathrm{Id} + a + \cdots + a^{q-1})$$

Montrons que p est un projecteur. Pour commencer, puisque $a^q = \mathrm{Id}$, on a

$$a \circ p = \frac{1}{q}(a + a^2 + \cdots + a^{q-1} + a^q) = \frac{1}{q}(a + a^2 + \cdots + a^{q-1} + \mathrm{Id}) = \frac{1}{q}(\mathrm{Id} + a + \cdots + a^{q-1}) = p$$

Par une récurrence évidente, on obtient que $\forall k \in [\![0, q-1]\!], \quad a^k \circ p = p$ et en sommant ces égalités sur k variant de 0 à $q - 1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{q-1} a^k \circ p = \sum_{k=0}^{q-1} p \Leftrightarrow \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{q-1} a^k}_{=q\times p}\right) \circ p = q \times p \Leftrightarrow q \times p \circ p = q \times p \Leftrightarrow p \circ p = p$$

donc p est bien un projecteur de $\mathbb{R}^n$. On sait que la trace d'un projecteur est égal à son rang donc

$$\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p) \Leftrightarrow \mathrm{tr}(\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} a^k) = \mathrm{rg}(p) \Leftrightarrow \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{tr}(a^k) = \mathrm{rg}(p) \qquad (1)$$

Pour obtenir la formule souhaitée, il suffit de montrer que

$$\mathrm{rg}(p) = \dim \ker(a - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\, p = \dim \ker(a - \mathrm{Id})$$

Soit $x \in \ker(a - \mathrm{Id})$ alors $a(x) = x$ ce qui implique que pour tous les entiers $k \in [\![0, k-1]\!]$, $a^k(x) = x$ donc

$$\forall x \in \ker(a - \mathrm{Id}), \quad p(x) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} a^k(x) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} x = \frac{1}{q} \times q \times x = x.$$

Nous venons donc de montrer que

$$(2) \qquad \ker(a - \mathrm{Id}) \subset \ker(p - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, p$$

(caractérisation des projecteurs).
Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id})$, l'égalité $p = a \circ p$, que nous avons montré précédemment, nous fournit les égalités suivantesmontre que

$$\forall x \in \mathrm{Im}\, p, \quad p(x) = x \underset{a\circ}{\Rightarrow} a(p(x)) = a(x) \underset{a\circ p = p}{\Leftrightarrow} p(x) = a(x) \underset{\text{puisque } p(x)=x}{\Rightarrow} x = a(x) \Rightarrow x \in \ker(a - \mathrm{Id})$$

Nous venons de montrer que

$$(3) \qquad \mathrm{Im}\, p \subset \ker(a - \mathrm{Id}).$$

Les égalités (2) et (3) montrent que $\mathrm{Im}(p) = \ker(a - \mathrm{Id})$ donc, en passant au dimension, on obtient $\mathrm{rg}(p) = \dim\ker(a - \mathrm{Id})$ et la formule (1) nous fournit alors l'égalité recherchée

$$\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{tr}(a^k) = \dim\ker(a - \mathrm{Id})$$

Remarque : en général, si G est un groupe commutatif fini de $GL_n(k)$, où k est corps de caractéristique distinct de $\mathrm{card}\, G$, alors $p = \dfrac{1}{\mathrm{card}\, G}\sum_{g\in G} g$ (qui est la moyenne des éléments du groupe) est un projecteur sur $\bigcap_{g\in G} \ker(g - \mathrm{Id})$.
Dans notre cas puisque A est un élément d'ordre finie de $GL_n(\mathbb{R})$, le groupe $< A >= \{A^k, \quad k \in [\![0, q-1]\!]\}$ engendré par A est fini et le projecteur s'écrit simplement $p = \dfrac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^k$.
Exercice subsidiaire : Montrer que S est une partie finie de $\underline{\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})}$ (ses éléments n'étant pas nécessairement inversibles) stable par produit alors $\mathrm{card}\, S$ divise $\sum_{s\in S} \mathrm{tr}(s)$

Correction de l'exercice 1.5 : Rappelons un résultat sur les polynômes que l'on utilisera constamment dans cet exercice :
si a est un réel et k un entier naturel non nul alors

$$a \text{ racine d'ordre au moins } k \text{ de } P \underset{\text{par définition}}{=} \left[P(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0\right] \Leftrightarrow \left[(X - a)^k \mid P(X)\right]$$

1. Pour commencer, montrons que F est linéaire

$$\begin{aligned}
\forall P, Q &\in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\
F(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(-a), (\lambda P + \mu Q)'(-a), (\lambda P + \mu Q)(a), (\lambda P + \mu Q)'(a)) \\
&= (\lambda P(-a) + \mu Q(-a), \lambda P'(-a) + \mu Q'(-a), \lambda P(a) + \mu Q(a), \lambda P'(a) + \mu Q'(a)) \\
&= (\lambda P(-a), \lambda P'(-a), \lambda P(a), \lambda P'(a)) + (\mu Q(-a), \mu Q'(-a), \mu Q(a), \mu Q'(a)) \\
&= \lambda(P(-a), P'(-a), P(a), P'(a)) + \mu(Q(-a), Q'(-a), Q(a), Q'(a)) \\
&= \lambda F(P) + \mu F(Q)
\end{aligned}$$

L'application F étant linéaire de E, qui est de dimension 4, dans $\mathbb{R}^4$, qui est de dimension 4, la caractérisation des isomorphismes entre espaces de même dimension montre qu'il suffit de montrer que F est injective, c'est-à-dire que son noyau est nul.
Soit $P \in \ker F$ alors

$$(P(-a), P'(-a), P(a), P'(a)) \Leftrightarrow \begin{cases} P(-a) = 0 \\ P'(-a) = 0 \\ P(a) = 0 \\ P'(-a) = 0 \end{cases} \Rightarrow (P(-a) = P'(-a) = 0 \text{ et } P(a) = P'(a) = 0)$$

donc $-a$ et a sont des racines d'ordre au moins 2 de P, ce qui implique que $(X - a)^2$ et $(X + a)^2$ divise P. Puisque a est non nul, les polynômes $(X - a)$ et $(X + a)$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$ donc $(X - a)^2$ et $(X + a)^2$ aussi et le lemme de Gauss montre que $(X-a)^2(X+a)^2$ divise P dans $\mathbb{R}[X]$. Par conséquent, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X) = Q(X)(X-a)^2(X+a)^2.$$

Puisque P est de degré au plus 3, s'il n'est pas nul, en passant au degré dans l'égalité précédente, on obtient que $\deg P \geqslant 4$, ce qui est absurde donc $P = 0$. On vient donc de montrer que $\ker F \subset \{0\}$ et comme $\{0\} \subset \ker F$, on en déduit que $\ker F = \{0\}$, c'est-à-dire que F est bien un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^4$.

2. Calcul de P_1 :

$$P_1 = F^{-1}(1,0,0,0) \Leftrightarrow F(P_1) = (1,0,0,0) \Leftrightarrow (P_1(-a), P_1'(-a), P_1(a), P_1'(a)) = (1,0,0,0)$$

On en déduit que a est une racine d'ordre au moins 2 de P_1, donc P_1 s'écrit

$$P_1(X) = (X-a)^2 Q(X)$$

Puisque P_1 est de degré au plus 3, on en déduit que Q est de degré au plus 1, c'est-à-dire qu'il s'écrit $Q(X) = \alpha X + \beta$, ce qui entraine que

$$P_1(X) = (X-a)^2(\alpha X + \beta)$$

Les conditions supplémentaires $P(-a) = 1$ et $P'(-a) = 0$ s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} P_1(-a) = 1 \\ P_1'(-a) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} (-a-a)^2(\alpha(-a)+\beta) & = 1 \\ 2(-a-a)(\alpha(-a)+\beta) + (-a-a)^2\alpha & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} \alpha(-a)+\beta & = \dfrac{1}{4a^2} \\ (\alpha(-a)+\beta) - a\alpha & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} -a\alpha+\beta & = \dfrac{1}{4a^2} \\ -2a\alpha+\beta & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cll} -a\alpha+\beta & = \dfrac{1}{4a^2} & \\ -a\alpha & = -\dfrac{1}{4a^2} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} \alpha & = \dfrac{1}{4a^3} \\ \beta & = \dfrac{1}{2a^2} \end{array}\right.$$

Nous venons donc de montrer que

$$P_1(X) = (X-a)^2\left(\frac{1}{4a^3}X + \frac{1}{2a^2}\right) = \frac{1}{4a^3}(X-a)^2(X+2a)$$

Calcul de P_3 :

$$P_3 = F^{-1}(0,0,1,0) \Leftrightarrow F(P_3) = (0,0,1,0) \Leftrightarrow (P_3(-a), P_3'(-a), P_3(a), P_3'(a)) = (0,0,1,0)$$

On en déduit que $-a$ est une racine d'ordre au moins 2 de P_3, donc P_3 s'écrit

$$P_3(X) = (X+a)^2 Q(X)$$

Puisque P_3 est de degré au plus 3, on en déduit que Q est de degré au plus 1, c'est-à-dire qu'il s'écrit $Q(X) = \alpha X + \beta$, ce qui entraine que

$$P_3(X) = (X+a)^2(\alpha X + \beta)$$

Les conditions supplémentaires $P_3(-a) = 1$ et $P_3'(-a) = 0$ s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} P_3(a) = 1 \\ P_3'(a) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} (a+a)^2(\alpha a+\beta) = 1 & = 1 \\ 2(a+a)(\alpha a+\beta) + (a+a)^2\alpha = 0 & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} \alpha a+\beta & = \dfrac{1}{4a^2} \\ (\alpha a+\beta) + a\alpha & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} a\alpha+\beta & = \dfrac{1}{4a^2} \\ 2a\alpha+\beta & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cll} a\alpha+\beta & = \dfrac{1}{4a^2} & \\ a\alpha & = -\dfrac{1}{4a^2} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} \alpha & = -\dfrac{1}{4a^3} \\ \beta & = \dfrac{1}{2a^2} \end{array}\right.$$

Nous venons donc de montrer que

$$P_3(X) = (X-a)^2\left(-\frac{1}{4a^3}X + \frac{1}{2a^2}\right) = -\frac{1}{4a^3}(X-a)^2(X-2a)$$

Calcul de P_2 :

$$P_2 = F^{-1}(0,1,0,0) \Leftrightarrow F(P_2) = (0,1,0,0) \Leftrightarrow (P_2(-a), P_2'(-a), P_2(a), P_2'(a)) = (0,1,0,0)$$

On en déduit que a est une racine d'ordre au moins 2 de P_2 et $-a$ est une racine d'ordre 1 exactement donc P_2, qui est de degré 3, s'écrit

$$P_2(X) = \alpha(X-a)^2(X+a)$$

La condition supplémentaire $P_2'(-a) = 1$ s'écrit

$$P_2'(-a) = 1 \Leftrightarrow \alpha(-a-a)^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4a^2}$$

Nous venons donc de montrer que

$$P_2(X) = \frac{1}{4a^2}(X-a)^2(X+a)$$

Calcul de P_4 :

$$P_4 = F^{-1}(0,0,0,1) \Leftrightarrow F(P_4) = (0,0,0,1) \Leftrightarrow (P_4(-a), P_4'(-a), P_4(a), P_4'(a)) = (0,0,0,1)$$

On en déduit que $-a$ est une racine d'ordre au moins 2 de P_4 et a est une racine d'ordre 1 exactement donc P_4, qui est de degré 3, s'écrit

$$P_4(X) = \alpha(X+a)^2(X-a)$$

La condition supplémentaire $P_4'(a) = 1$ s'écrit

$$P_4'(a) = 1 \Leftrightarrow \alpha(a+a)^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4a^2}$$

Nous venons donc de montrer que

$$P_4(X) = \frac{1}{4a^2}(X+a)^2(X-a)$$

3. Rappelons que E^* désigne l'ensemble des formes linéaires sur E. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) et si E est dimension finie, alors $\dim E^* = \dim E$.
L'application g est une forme linéaire sur E. Soient $(\varphi_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ les quatre formes linéaires sur E définies par

$$\forall P \in E, \quad \varphi_1(P) = P(-a), \quad \varphi_2(P) = P'(-a), \quad \varphi_3(P) = P(a), \quad \varphi_4(P) = P'(a)$$

L'existence des réels $(a_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ est équivalente au fait que $g \in \mathrm{Vect}(\varphi_i, \quad i \in [\![1,4]\!]$. Montrons que les quatre formes linéaires $(\varphi_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ sont libres. Soient $(\lambda_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ quatre réels tels que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\varphi_i &= 0 \Leftrightarrow \forall P \in E, \quad \lambda_1\varphi_1(P) + \lambda_2\varphi_2(P) + \lambda_3\varphi_3(P) + \lambda_4\varphi_4(P) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall P \in E, \quad \lambda_1 P(-a) + \lambda_2 P'(-a) + \lambda_3 P(a) + \lambda_4 P'(a) = 0\end{aligned}$$

En évaluant cette égalité en $P = P_i$ pour $i \in [\![1,4]\!]$, on obtient

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0$$

ce qui montre que les quatre formes linéaires $(\varphi_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ forment une famille libre de E^*, qui est de dimension $\dim E = 4$ donc les quatre formes linéaires $(\varphi_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ forment une base de E^*. Puisque $g \in E^*$, on en déduit l'existence de quatre réels $(b_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ tels que

$$\begin{aligned}g &= \sum_{i=1}^{4} b_i\varphi_i \Leftrightarrow \forall P \in E, \quad g(P) = b_1\varphi_1(P) + b_2\varphi_2(P) + b_3\varphi_3(P) + b_4\varphi_4(P)\\ &\Leftrightarrow \forall P \in E, \quad g(P) = b_1 P(-a) + b_2 P'(-a) + b_3 P(a) + b_4 P'(a)\end{aligned}$$

et on obtient le résultat escompté en choisissant

$$a_1 = b_3, \quad a_2 = b_1, \quad a_3 = b_4, \quad a_4 = b_2$$

Remarque : on peut expliciter les $(a_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ en évaluant l'égalité

$$g(P) = a_1 P(a) + a_2 P(-a) + a_3 P'(a) + a_4 P'(-a)$$

en $P = P_i, \quad i \in [\![1,4]\!]$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
a_1 &= g(P_3) = -\frac{1}{4a^3}\int_{-1}^{1}(t-a)^2(t-2a)dt = 1+\frac{2}{3a^2}\\
a_2 &= g(P_1) = \frac{1}{4a^3}\int_{-1}^{1}(t-a)^2(t+2a)dt = 1\\
a_3 &= g(P_4) = \frac{1}{4a^2}\int_{-1}^{1}(t+a)^2(t-a)dt = \frac{1}{6a}-\frac{1}{2}a\\
a_4 &= g(P_2) = \frac{1}{4a^2}\int_{-1}^{1}(t-a)^2(t+a)dt = -\left(\frac{1}{6a}-\frac{1}{2}a\right)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons alors la formule remarquable

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \int_{-1}^{1} tP(t)dt = \left(1+\frac{2}{3a^2}\right)P(a)+P(-a)+\left(\frac{1}{6a}-\frac{1}{2}a\right)\left(P'(a)-P'(-a)\right).$$