1 Exercices

Exercice 1.1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 5 \\ 14 & -11 & 10 \\ 7 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $A^2 - 2A + I = 0$. Quelles sont les valeurs propres de A ? Déterminer les espaces propres de A.
2. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec A.
4. Résoudre l'équation $(E) : X^2 = A$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 1.2 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \ker(u - \mathrm{Id})^2 \oplus \ker(u + \mathrm{Id})^2$.
   Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que $mat(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. On note $\mathcal{C}(u)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ qui commutent avec u.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un espace vectoriel.
   (b) Soit $v \in \mathcal{C}(u)$. Montrer que tout vecteur propre de u est vecteur propre de v.
   Montrer que $mat(v, \mathcal{B})$ est de la forme $\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ (où $\mathcal{B}$ est la base de la question 2).
   (c) Expliciter $\mathcal{C}(u)$ et donner la dimension de $\mathcal{C}(u)$.

Exercice 1.3 Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A et B commutent.
2. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'espace vectoriel engendré par A et B est un corps.
   Quel est l'inverse de $aA + bB$?

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur.
2. Montrer que cela revient à rechercher deux vecteurs propres et un vecteur x tel que $Ax = x + e$ où e est un vecteur propre. Rechercher par le calcul ses vecteurs
3. Si $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$, écrire toute matrice qui commute à A sous la forme $PM'P^{-1}$ puis calculer directement
4. Si X existe, montrer que X commute avec A. En utilisant la question précédente, obtenir la forme de X puis effectuer la résolution (on s'arrangera pour remplacer A par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Trouver un polynôme annulateur simple puis toute valeur propre est racine de tout polynôme annulateur
2. Montrer que cela revient à rechercher deux vecteurs propres et deux vecteurs x_i tel que $Ax_i = \pm x_i + e_i$, où e_i est un vecteur propre. Rechercher alors les x_i par le calcul direct.
3. (a) Caractérisation des sous-espaces
   (b) Si u et v commutent, montrer que $v(\ker(P(u)) \subset \ker(P(u))$, ce qui donnera la forme de la matrice de v
   (c) Ecrire les matrices de u et d'un élément du commutant dans la base précédente puis calculer pour obtenir la forme de sa matrice

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. RAS
2. Montrer que cela revient à chercher trois vecteurs (e, f, g) tel que
$$Ae = -e = g, \quad Af = e - f, \quad Ag = f - g,$$
chercher leur forme par le calcul puis utiliser le déterminant pour assurer la liberté.
3. Montrer que $\mathrm{Vect}(A, B)$ est un sous-anneau de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ (pour commencer vérifier que A^2, B^2, AB, BA appartiennent bien à $\mathrm{Vect}(A, B)$). Ensuite, rechercher l'élément neutre E de $\mathrm{Vect}(A, B)$ pour le produit (attention, ce n'est pas I_3 car $\mathrm{Vect}(A, B)$ n'est pas un sous-groupe pour la multiplication, de $GL_3(\mathbb{R})$) puis résoudre l'équation
$$CD = E$$
en fonction de C (en explicitant C, D et E en fonction de A, B, ce qui fournit des systèmes par liberté de A et B)

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. Je laisse le lecteur vérifier que $A^2-2A+I=0$. Soit λ une valeur propre éventuelle de A. Puisque toute valeur propre de A est racine de tout polynôme annulateur de A, on en déduit que

$$\lambda^2-2\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=1.$$

Par conséquent, 1 est la seule propre possible de A (ce qui n'implique pas que 1 soit valeur propre même si c'est la seule valeur propre éventuelle, le lecteur s'en convaincra en étudiant $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ dont X^3+X est un polynôme annulateur).

Déterminons l'espace propre $E_1(A)$ de A associé à la valeur propre 1. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_1(A)$ alors

$$\begin{aligned}
AX &= 1.X \Leftrightarrow \begin{pmatrix}8&-6&5\\14&-11&10\\7&-6&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}8x-6y+5z=x\\14x-11y+10z=y\\7x-6y+6z=z\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}7x-6y+5z=0\\14x-12y+10z=0\\7x-6y+5z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cc}7x-6y+5z=0&\\0=0&L_2\leftarrow L_2-2L_1\\0=0&L_3\leftarrow L_3-L_1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ x=\frac{6}{7}y-\frac{5}{7}z\right.\\
&\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{6}{7}y-\frac{5}{7}z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-\frac{6}{7}\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow X\in \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{6}{7}\\0\\1\end{pmatrix})=\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\0\\7\end{pmatrix}),
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$E_1(A)=\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\0\\7\end{pmatrix})$$

2. Cela revient à dire qu'il existe une base (e_1,e_2,e_3) telle que

$$\left\{\begin{array}{rl}Ae_1=&e_1+e_2\\Ae_2=&e_2\\Ae_3=&e_3\end{array}\right.$$

Les deux dernières égalités signifient simplement que e_2 et e_3 sont des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 1 donc e_2,e_3 doivent appartenir à $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\0\\7\end{pmatrix})$. Traduisons la première égalité

$$Ae_1=e_1+e_2\Leftrightarrow (A-I_3)e_1=e_2$$

Par conséquent, on choisir le vecteur propre e_2 de façon à ce que e_2 appartienne à $\mathrm{Im}(A-I_3)$. Puisque $\dim\ker(A-I_3)=2$, le théorème du rang montre que $\mathrm{rg}(A-I_3)=1$ donc $\mathrm{Im}(A-I_3)$ est engendré par un vecteur. Puisque e_2 est un vecteur non nul et qu'il appartient à l'image, le vecteur e_2 doit à la fois engendré $\mathrm{Im}(A-I_3)$ et appartenir à $E_1(A)$. Un calcul direct nous montre que

$$A-I_3=\begin{pmatrix}7&-6&5\\14&-12&10\\7&-6&5\end{pmatrix},$$

et l'on constate que tous les vecteurs colonnes (qui engendre l'image de $A-I_3$) sont des multiples du vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Un autre calcul direct montre que le vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ appartient à $E_1(A)$.

Dès lors, on choisit pour e_2 le vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et pour e_3 un vecteur quelconque de $E_1(A)$ non colinéaire au vecteur e_2

(pour que la famille (e_2, e_3) soit libre), par exemple le vecteur $e_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient bien.

Déterminons maintenons un vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ convenable

$$\begin{aligned} (A - I_3)e_1 &= e_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 14 & -12 & 10 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 7x - 6y + 5z & = 1 \\ 14x - 12y + 10z & = 2 \\ 7x - 6y + 5z & = 1 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} 7x - 6y + 5z & = 1 & \\ 0 & = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 & = 0 & L_3 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow 7x - 6y + 5z = 1 \end{aligned}$$

Le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient. Montrons que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui revient à montrer que le déterminant, dans la base canonique, de cette famille de vecteurs est non nul

$$\det(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Si P désigne la matrice de changement de base de la base canonique dans la base (e_1, e_2, e_3), autrement dit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors les formules de changement de base nous montre que

$$P^{-1}AP = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Ae_1 & Ae_2 & Ae_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \Leftrightarrow A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et donc A est bien semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. On note $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit M une matrice qui commute avec A

$$MA = AM \Leftrightarrow MPA'P^{-1} = PA'P^{-1}M \Leftrightarrow P^{-1}MPA' = A'P^{-1}MP$$

Si l'on pose $M' = P^{-1}MP$ alors $M'A' = A'M'$ donc M' commute avec A'. Si l'on pose $M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ alors on a

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & b & c \\ d+e & e & f \\ g+h & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a + b = a \\ d + e = a + d \\ e = b + e \\ c + f = f \\ g + h = g \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = 0 \\ e = a \\ c = 0 \\ h = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix}, \quad (a, d, f, g, i) \in \mathbb{R}^5 \end{aligned}$$

Par conséquent, M commute avec A ssi

$$M = PM'P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

où (a, d, f, g, i) sont des réels quelconques.
Remarque : l'idée de ramener l'étude de la commutation de M et A à celle de M' et A' est intuitive, si l'on raisonne en

terme d'endomorphismes. Si m (resp. a) désigne l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est M (resp. A), l'égalité $AM = MA$ signifie que les endomorphismes m et a commutent. Vu qu'il existe une base dans laquelle la matrice de a est simple, il est normal de considérer m dans cette même base puisque l'on étudie la commutation de a et m, d'où l'introduction simultanée de M' et A' qui représentent les endomorphismes m et a dans cette base.

4. On remarque pour commencer que si X vérifie l'équation (E) alors X commute avec A puisque

$$XA = XX^2 = X^3 = X^2X = AX$$

La question 3) montre alors que X s'écrit

$$X = P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & c \\ d & 0 & e \end{pmatrix} P^{-1}, \quad (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5.$$

D'autre part, puisque $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ et que

$$(PQP^{-1})^2 = PQ\underbrace{P^{-1}P}_{=I}QP^{-1} = PQ^2P^{-1}$$

l'équation (E) s'écrit encore

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & c \\ d & 0 & e \end{pmatrix} P^{-1}\right)^2 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \Leftrightarrow P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & c \\ d & 0 & e \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & c \\ d & 0 & e \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab+cd & a^2 & ac+ce \\ ad+de & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ e^2 = 1 \\ 2ab + cd = 1 \\ ac + ce = 0 \\ ad + de = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \in \{-1,1\} \\ e = \varepsilon_2 & \varepsilon_2 \in \{-1,1\} \\ 2\varepsilon_1 b + cd = 1 \\ c(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = 0 \\ d(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour finir la résolution, nous sommes amené à considérer différents cas

- <u>Premier cas</u> : $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \neq 0$, c'est-à-dire si $(a,e) = (1,1)$ ou $(a,e) = (-1,-1)$ alors

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \\ 2\varepsilon_1 b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \\ b = \dfrac{1}{2\varepsilon_1} \end{cases}$$

Par conséquent, $X = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ ou $X = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$

- <u>Second cas</u> : $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$, c'est-à-dire si $(a,e) = (1,-1)$ ou $(a,e) = (-1,1)$ alors

$$(E) \Leftrightarrow 2\varepsilon_1 b + cd = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1-cd}{2\varepsilon_1}$$

Par conséquent,

$$X = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1-cd}{2} & 1 & c \\ d & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad (c,d) \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } X = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-1-cd}{2} & -1 & c \\ d & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad (c,d) \in \mathbb{R}^2.$$

Conclusion : l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 5 \\ 14 & -11 & 10 \\ 7 & -6 & 6 \end{pmatrix}$ admet une infinité de solutions données par

$$S = \left\{ P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ \dfrac{1-cd}{2} & \varepsilon & c \\ d & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} P^{-1}, \quad (c,d) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \varepsilon \in \{-1;1\} \right\},$$

où P est la matrice inversible $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque : d'un point de vue topologique, l'ensemble des solutions dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $X^2 = A$ possèdent deux points isolés $P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ et $P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ et deux composantes connexes infinies.

Correction de l'exercice 1.2 :

1. Les polynômes $(X-1)^2$ et $(X+1)^2$ étant premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$, le théorème des noyaux montre que

$$\ker(u-\mathrm{Id})^2 \oplus \ker(u+\mathrm{Id})^2 = \ker\left[(u-\mathrm{Id})^2(u+\mathrm{Id}^2)\right].$$

Il suffit par conséquent de montrer que $(X-1)^2(X+1)^2 = (X^2-1)^2$ est un polynôme annulateur de u donc de A

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^2 - I_4)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_4$$

Les valeurs propres possibles (nécessairement réelles) de u sont racines du polynôme annulateur $(X-1)^2(X+1)^2$ de u donc les valeurs propres possibles de u sont 1 ou -1. Déterminons les espaces propres respectifs

<u>Détermination de $E_1(A)$</u> : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_1(A)$ alors

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2t+y=x \\ -3x+4z=y \\ 3t+y=z \\ -x+z=t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -x+2t+y=0 \\ -3x-y+4z=0 \\ y-z+3t=0 \\ -x+z-t=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} -x+2t+y=0 & \\ -4y+4z-6t=0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ y-z+3t=0 & \\ -y+z-3t=0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} -x+2t+y=0 & \\ -4y+4z-6t=0 & \\ 6t=0 & L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2 \\ -6t=0 & L_4 \leftarrow 4L_4 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=0 \\ y=z \\ x=z \end{array}\right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Détermination de $E_{-1}(A)$</u> : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_1(A)$ alors

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2t+y=-x \\ -3x+4z=-y \\ y+3t=-z \\ -x+z=-t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+2t+y=0 \\ -3x+y+4z=0 \\ y+z+3t=0 \\ -x+z+t=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} x+2t+y=0 & \\ 4y+4z+6t=0 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ y+z+3t=0 & \\ y+z+3t=0 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} x+2t+y=0 & \\ 4y+4z+6t=0 & \\ 6t=0 & L_3 \leftarrow 4L_3 - L_2 \\ 6t=0 & L_4 \leftarrow 4L_4 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=0 \\ y=-z \\ x=z \end{array}\right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $E_{-1}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$

2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$. L'égalité matricielle $mat(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ est équivalente au système suivante

$$\begin{cases} Ae_1 = e_1 \\ Ae_2 = e_2 + e_1 \\ Ae_3 = -e_3 \\ Ae_4 = -e_4 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ae_1 = e_1 \\ (A - I_4)e_2 = e_1 \\ Ae_3 = -e_3 \\ (A + I_4)e_4 = e_3 \end{cases}$$

(puisque l'on se rappelle de la célèbre formule $y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX$). En particulier, on a $e_1 \in E_1(A)$ et $e_3 \in E_{-1}(A)$ et d'après la question 1), chacun de ces espaces propres est de dimension 1, nous n'avons d'autre choix que de choisir (à un scalaire multiplicatif près)

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Ces choix étant faits, il reste à déterminer e_2 et e_4, ce que nous allons faire par un calcul direct.

<u>Détermination de e_2</u> :

$$(A - I_4)e_2 = e_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1&1&0&2\\-3&-1&4&0\\0&1&-1&3\\-1&0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + 2t &= 1 \\ -3x - y + 4z &= 1 \\ y - z + 3t &= 1 \\ -x + z - t &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + 2t &= 1 & \\ -4y + 4z - 6t &= -2 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ y - z + 3t &= 1 & \\ -y + z - 3t &= -1 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + 2t &= 1 & \\ -4y + 4z - 6t &= -2 & \\ 6t &= 2 & L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2 \\ -6t &= -2 & L_4 \leftarrow 4L_4 - L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ y = z \\ x = -\frac{1}{3} + z \end{cases}$$

Par conséquent, si l'on fixe $z = 0$, le vecteur $e_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ vérifie bien $(A - I_4)e_2 = e_1$.

<u>Détermination de e_4</u> :

$$(A + I_4)e_4 = e_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&2\\-3&1&4&0\\0&1&1&3\\-1&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2t &= 1 \\ -3x + y + 4z &= -1 \\ y + z + 3t &= 1 \\ -x + z + t &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2t &= 1 & \\ 4y + 4z + 6t &= 2 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ y + z + 3t &= 1 & \\ y + z + 3t &= 1 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2t &= 1 & \\ 4y + 4z + 6t &= 2 & \\ 6t &= 2 & L_3 \leftarrow 4L_3 - L_2 \\ 6t &= 2 & L_4 \leftarrow 4L_4 - L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ y = -z \\ x = \frac{1}{3} + z \end{cases}$$

Par conséquent, si l'on fixe $z = 0$, le vecteur $e_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ vérifie bien $(A - I_4)e_4 = e_3$.

<u>la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$</u> : cela revient à montrer que le déterminant, dans la base canonique, de

cette famille est non nul

$$\begin{aligned}
\det(e_1,e_2,e_3,e_4) &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2\leftarrow C_2-C_4}{=} \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\times 1\times(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\times(-2)\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4}{9} \neq 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, puisque $\begin{cases} Ae_1 = e_1 \\ Ae_2 = e_2 + e_1 \\ Ae_3 = -e_3 \\ Ae_4 = -e_4 + e_3 \end{cases}$, A la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ est la matrice

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} Ae_1 & Ae_2 & Ae_3 & Ae_4 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} \end{array}$$

si P désigne la matrice de changement de base de la base canonique dans la base (e_1,e_2,e_3,e_4), autrement dit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

3. (a) Il est évident que $\mathcal{C}(u)$ est inclu dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ donc nous allons utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels
Si l'on note 0 l'application nulle sur $\mathbb{R}^4$, on a $0 \in \mathcal{C}(u)$ car $0 \circ u = 0 = u \circ 0$ donc $\mathcal{C}(u)$ est non vide (.
Soient $v, w \in \mathcal{C}(u)$, c'est-à-dire $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$ et soient λ, μ deux réels alors on a

$$u \circ (\lambda v + \mu w) = \lambda u \circ v + \mu u \circ w = \lambda v \circ u + \mu w \circ u = (\lambda v + \mu w) \circ u$$

donc $\lambda v + \mu w \in \mathcal{C}(u)$, ce qui démontre que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

(b) *On utilise le résultat élémentaire élémentaire d'algèbre linéaire :*
Si u et v commutent alors pour tout polynôme P, on a $v(\ker(P(u)) \subset \ker(P(u))$.
Cela simplement que v commute avec $P(u)$, ce qui implique

$$\begin{aligned}
\forall x &\in \ker(P(u)), \quad P(u)(v(x)) = [P(u)\circ v](x) = [v \circ P(u)](x) = v[P(u)(x)] = v(0) = 0 \\
&\Rightarrow \forall x \in \ker P(u), \quad v(x) \in \ker(P(u)) \Rightarrow v(\ker(P(u)) \subset \ker(P(u))
\end{aligned}$$

Soit $v \in \mathcal{C}(u)$. D'après la question 1), nous avons

$$\mathbb{R}^4 = \ker(u - \mathrm{Id})^2 \oplus \ker(u + \mathrm{Id})^2$$

donc les sous-espaces vectoriels $\ker(u-\mathrm{Id})^2$ et $\ker(u+\mathrm{Id})^2$ sont stables par v. Or $e_1 \in \ker(u - \mathrm{Id}) \subset \ker(u - \mathrm{Id})$ et $e_2 \in \ker(u-\mathrm{Id})^2$ car

$$(u-\mathrm{Id})^2 e_2 = (u-\mathrm{Id})(u-\mathrm{Id})e_2 = (u-\mathrm{Id})e_1 = 0$$

donc $\mathrm{Vect}(e_1,e_2) \subset \ker(u-\mathrm{Id})^2$. De même, $\mathrm{Vect}(e_3,e_4) \subset \ker(u+\mathrm{Id})^2$ (je laisse au lecteur la vérification).
En passant à la dimension, on en déduit que $\dim\ker(u-\mathrm{Id})^2 \geqslant 2$ et $\dim\ker(u+\mathrm{Id})^2 \geqslant 2$, or l'on sait que

$$4 = \dim\ker(u-\mathrm{Id})^2 + \dim\ker(u+\mathrm{Id})^2$$

donc $\dim\ker(u-\mathrm{Id})^2 = \dim\ker(u+\mathrm{Id})^2 = 2$. Ces deux égalités combinées aux inclusions $\mathrm{Vect}(e_1,e_2) \subset \ker(u-\mathrm{Id})^2$ et $\mathrm{Vect}(e_3,e_4) \subset \ker(u+\mathrm{Id})^2$ montrent que

$$\mathrm{Vect}(e_1,e_2) = \ker(u-\mathrm{Id})^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Vect}(e_3,e_4) = \ker(u+\mathrm{Id})^2$$

On en déduit que les espaces $\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ et $\mathrm{Vect}(e_3,e_4)$ sont stables par v, ce qui implique que la matrice de v dans la base (e_1,e_2,e_3,e_4) est de la forme

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} v(e_1) & v(e_2) & v(e_3) & v(e_4) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} \end{array}$$

Ensuite, les espaces $\ker(u-\mathrm{Id})$ et $\ker(u+\mathrm{Id})$ sont stables par v. Or on a les égalités suivantes qui découlent de la question 1)

$$\ker(u-\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_1) \quad \text{et} \quad \ker(u+\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_3)$$

donc les espaces $\mathrm{Vect}(e_1)$ et $\mathrm{Vect}(e_3)$ sont stables par v, ce qui entraine que a matrice de v dans la base (e_1,e_2,e_3,e_4) est de la forme

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} v(e_1) & v(e_2) & v(e_3) & v(e_4) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} \end{array}$$

(c) Soit $v \in \mathcal{C}(u)$, la question 3.b) nous montre l'existence de 6 réels (a,b,c,d,e,f) tels que

$$mat(v,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Le fait que u et v commutent impliquent que leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$ commutent, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a+b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & d-e \\ 0 & 0 & 0 & -f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & f-e \\ 0 & 0 & 0 & -f \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b = b+c \\ d-e = f-e \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = c \\ d = f \end{array} \right.$$

Par conséquent, v commute avec u ssi sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$mat(v,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

autrement dit v commute avec u ssi

$$mat(v,\mathcal{B}) \in \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

Il est évident que ce dernier espace vectoriel est de dimension 4 donc $\dim\mathcal{C}(u) = 4$

Remarque : le résultat élémentaire d'algèbre cité au début de la question 3.b) joue un rôle fondamental dans les applications théoriques et "concrètes" de l'algèbre aux différentes sciences (physique, informatique, etc) et il possède de nombreuses généralisations dont les applications permettent la résolution de nombreuses équations aux dérivées partielles de la physique. En particulier, la physique des champs est entièrement construite autour de la notion d'opérateurs ou plutôt de groupe d'opérateurs (que les physiciens appellent symétries) commutant à

certains opérateurs privilégiés. On réobtient ainsi l'interprétation théorique du rôle majeur joué par le Laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *en physique classique (regarder toutes les équations fondamentales vue en physique selon si n=1, n=2 ou n=3) , ou de l'opérateur de Dirac* $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ *en mécanique relativiste (par exemple, en électromagnétisme).*
Donnons un exemple un peu plus concret (mais complétement virtuel). Imaginons que nous disposions d'une théorie physique T *possédant une symétrie privilégié décrite par la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et qui à tout système physique* S *associe une matrice* $V_S \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$*. Supposons que votre théorie exige que toute matrice* V_S *d'un système physique* S *commute avec* A*, alors d'après la question 3.c), vous êtes certain que les matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

joueront un rôle majeur dans la théorie T.

Correction de l'exercice 1.3 :

1. $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $AB = BA$

2. Les deux matrices A et B sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Pour fixer les idée, on suppose que la première base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u est l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $mat(u, \mathcal{B}) = A$ donc u est défini par

$$(1) \qquad \begin{cases} u(e_1) = -e_1 + e_2 \\ u(e_2) = -e_2 + e_3 \\ u(e_3) = -e_3 + e_1 \end{cases}$$

Notre objectif est de trouver une base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ telle que $B = mat(u, \mathcal{B}')$ autrement dit que

$$(2) \qquad \begin{cases} u(f_1) = -f_1 + f_3 \\ u(f_2) = -f_2 + f_3 \\ u(f_3) = -f_3 + f_2 \end{cases}$$

En toute généralité, on devrait écrire les coordonnées des f_i dans la base $\mathcal{B}$ puis réinjecter les égalités obtenus dans le système (2) et utiliser les égalités du système (1). Mais, un bon calculateur étant un calculateur qui calcule peu, on remarque A et B sont les mêmes colonnes sauf que la première et la troisième sont échangés. On constate alorsdirectement que les vecteurs

$$f_1 = e_3, \quad f_2 = e_2, \quad f_3 = e_1$$

conviennent. Par conséquent, les matrices A et B commutent
Remarque : On a même $A = PBP^{-1}$*, où* P *est la matrice de changement de base de* (e_1, e_2, e_3) *dans* (f_1, f_2, f_3)*, c'est-à-dire que* $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Pour montrer que $\text{Vect}(A, B)$ est un corps, c'est-à-dire un anneau dont tous les éléments non nuls admettent un inverse appartenant à $\text{Vect}(A, B)$.
Pour commencer $\text{Vect}(A, B) \subset \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ qui est un anneau (non commutatif). On se dit dès lors qu'il suffit d'utiliser la caractérisation des sous-anneaux d'un anneau. Malheureusement, cela ne convient pas car si l'élément neutre pour l'addition de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, qui est 0_4, appartient bien à $\text{Vect}(A, B)$ (puisque c'est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$), l'ensemble $\text{Vect}(A, B)$ ne contient pas l'élément neutre pour la multiplication de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, qui est I_3. Cela résulte du calcul suivant : soit $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} aA + bB &= I_3 \Leftrightarrow a \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a-b & b & a \\ a & -a-b & b \\ b & a & -a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-b = 1 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui est impossible. Il nous faut donc vérifier toutes les conditions sur les corps (Ô joie !!)

- Vect(A, B) est non vide car $0_3 = 0 \times A + 0 \times B \in \text{Vect}(A, B)$
- Vect(A, B) est stable par addition qui est une loi associative et commutative : L'addition des matrices est associative et commutative. Ensuite, puisque Vect(A, B) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il est stable par addition
- Vect(A, B) est stable par produit et le produit est commutatif : Soit $T = aA+bB$ et $Z = cA+dB$, nous devons à priori montrer que TZ et ZT appartiennent à Vect(A, B) car l'anneau Vect(A, B) n'est pas commutatif puisqu'il est inclu dans un anneau qui ne l'est pas. En fait, Vect(A, B) est commutatif car, A et B commutant, on a

$$\begin{aligned} TZ &= (aA + bB)(cA + dB) = acA^2 + adAB + bcBA + bdB^2 = acA^2 + adBA + bcAB + bdB^2 \\ &= (cA + dB)(aA + bB) = ZT \end{aligned}$$

Le calcul précédent montre que Vect(A, B) est stable par produit si $A^2, AB = BA, B^2$ appartiennent à Vect(A, B) Effectuons le calcul de tous ces produits et en s'aidant des coefficients nuls pour l'une des matrices et non nuls pour l'autre, on obtient directement que

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2A + B \in \text{Vect}(A, B) \\ AB &= BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -A - B \in \text{Vect}(A, B) \\ B^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A - 2B \in \text{Vect}(A, B) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} (aA + bB)(cA + dB) &= acA^2 + adAB + bcBA + bdB^2 = acA^2 + adBA + bcAB + bdB^2 \\ &= ac(-2A + B) + (ad + bc)(-A - B) + bd(A - 2B) \\ (aA + bB)(cA + dB) &= A\,(bd - ad - bc - 2ac) + B\,(ac - ad - bc - 2bd) \in \text{Vect}(A, B) \end{aligned}$$

donc Vect(A, B) est bien stable par produit

- le produit est associatif et distributif par rapport à l'additon : cela résulte que le produit des matrices est associatif et distributif par rapport à l'addition des matrices
- Existence d'un élément neutre : Nous devons rechercher un élément $E = aA + bB \in \text{Vect}(A, B)$ tel que pour tout élément T de Vect(A, B), on ait $ET = T$ et $TE = T$. Le produit étant commutatif, il suffit de vérifier la première égalité. En outre, l'égalité

$$\forall T \in \text{Vect}(A, B), \quad ET = T$$

cela implique que $EA = A$ et $EB = B$. Réciproquement si $EA = A$ et $EB = B$, je laisse le lecteur vérifier que

$$\forall T \in \text{Vect}(A, B), \quad ET = T$$

En utilisant le fait que A et B sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} EA &= A \Leftrightarrow (aA + bB)A = A \Leftrightarrow aA^2 + bBA = A \Leftrightarrow a(-2A + B) + b(-A - B) = A \\ &\Leftrightarrow A\,(-2a - b) + B\,(a - b) = A \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - b &= 1 \\ a - b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

donc

$$E = -\frac{1}{3}(A + B) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ensuite un calcul direct montre que

$$EB = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B$$

Par conséquent, nous venons de montrer que l'élément neutre de Vect(A, B) est $E = -\dfrac{1}{3}(A + B)$.
Remarquons que E n'est pas égal à I_3 et qu'il n'est pas inversible dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

- Existence d'un inverse pour tout élément non nul de $\text{Vect}(A,B)$: Soit $T = aA + bB$ un élément non nul de $\text{Vect}(A,B)$, c'est-à-dire que $(a,b) \neq (0,0)$ (puisque A,B sont linéairement indépendants). Nous devons montrer l'existence d'un élément $Z = cA + dB \in \text{Vect}(A,B)$ tel que $TZ = E$ et $ZT = E$. Seul la première égalité est intéressante car la seconde en résulte par commutativité du produit sur $\text{Vect}(A,B)$. En utilisant l'indépendance linéaire de A,B et en utilisant les calculs menés pour la stabilité de $\text{Vect}(A,B)$ pour le produit, on a :

$$\begin{aligned} TZ &= E \Leftrightarrow A\left(-c(b+2a)+d(b-a)\right) + B\left(c(a-b)-d(a+2b)\right) = -\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}B \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -c(2a+b)+d(b-a) &= -\dfrac{1}{3} \\ c(a-b)-d(a+2b) &= -\dfrac{1}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a-b & b-a \\ a-b & -a-2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} -2a-b & b-a \\ a-b & -a-2b \end{pmatrix}$ est

$$3(a^2+ab+b^2) = 3((a+\frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2)$$

Puisque a et b sont réels, le déterminant est nul ssi $\left\{ \begin{array}{l} a + \dfrac{b}{2} = 0 \\ b = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow a = b = 0$ (la somme de deux positifs est nul ssi ils sont tous les deux nuls).

Par conséquent, si $(a,b) \neq (0,0)$ alors la matrice $\begin{pmatrix} -2a-b & b-a \\ a-b & -a-2b \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est

$$\begin{pmatrix} -2a-b & b-a \\ a-b & -a-2b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3(a^2+ab+b^2)} \begin{pmatrix} -a-2b & a-b \\ b-a & -2a-b \end{pmatrix}$$

(car l'inverse de $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est $\dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$). Par conséquent, on obtient que

$$\begin{aligned} TZ &= E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2a-b & b-a \\ a-b & -a-2b \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9(a^2+ab+b^2)}\begin{pmatrix} -a-2b & a-b \\ b-a & -2a-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = -\frac{1}{9(a^2+ab+b^2)}\begin{pmatrix} -3b \\ -3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{3(a^2+ab+b^2)} \\ \dfrac{a}{3(a^2+ab+b^2)} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow Z = \frac{b}{3(a^2+ab+b^2)}A + \frac{a}{3(a^2+ab+b^2)}B \in \text{Vect}(A,B) \end{aligned}$$

Nous venons donc de montrer que tout élément non nul $aA+bB$ admet un inverse dans $\text{Vect}(A,B)$ et que

$$\forall (a,b) \neq (0,0), \quad (aA+bB)^{-1} = \frac{b}{3(a^2+ab+b^2)}A + \frac{a}{3(a^2+ab+b^2)}B$$