1 Exercices

Exercice 1.1 Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit l'équation $(E_{\mathbb{K}}) : X^3 - 2X^2 + I_n = 0_n$, où X est dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Résoudre l'équation $(E_{\mathbb{R}})$
2. On suppose désormais que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.
   (a) Montrer que si X est une solution de $(E_{\mathbb{Q}})$ alors $\text{tr}(X) \in \mathbb{N}$ et $\det(X) = \pm 1$
   (b) Résoudre l'équation $(E_{\mathbb{Q}})$ lorsque $n = 2$ puis lorsque $n = 3$.
   (c) La résoudre dans le cas général

Exercice 1.2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.
2. Résoudre dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$.
3. Soit B une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et C la matrice de $\mathfrak{M}_{3n}(\mathbb{R})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 2A & 2A & A \\ A & 3A & A \\ A & 2A & 2A \end{pmatrix}$.

   Montrer que si A est diagonalisable alors C l'est aussi.

Exercice 1.3 1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$. Déterminer $\text{tr}\, A$ et $\det A$.

2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 1.4 Soit S l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $\inf\limits_{P \in S} \int_0^1 (P(t))^2 dt$.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. La matrice X admet un polynôme annulateur à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc X est diagonalisable et elle est de la forme PDP^{-1}. Vérifier que D est également solution de l'équation, ce qui fournit les valeurs possibles pour D donc pour X. La réciproque est facile.

2. On suppose désormais que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

   (a) Diagonaliser X dans $\mathbb{R}$ donc sa trace est de la forme $\mathrm{tr}(X) = a + br_+ + cr_-$, où r_+ et r_- sont les deux valeurs propres possibles et non rationnelles de X et où a, b, c sont des entiers (les multiplicités des valeurs propres éventuelles). Puisque X est à coefficients rationnels, sa trace est également à coefficients rationnels, ce qui implique que $br_+ + cr_- \in \mathbb{Q}$. En écrivant $r_\pm = \alpha \pm \beta\sqrt{\delta}$, on obtient que nécessairement $b = c$ donc $\mathrm{tr}(X) = a + b(r_+ + r_-) \in \mathbb{N}$. Pour le déterminant, il suffit de voir qu'il s'agit du produit des valeurs propres de X (et que $b = c$)

   (b) A l'aide de la question précédente, on a que $\mathrm{tr}(X) = a + b$ (a étant la multiplicité de la valeur propre rationnelle et b celle d'une des deux valeurs propres non rationnelles) etl'on a $a + b + c = n$ (car X est diagonalisable)
   Lorsque $n = 2$, montrer que l'on a nécessairement $b = c = 1$ et $a = 0$ ou $b = c = 0$ et $a = 2$. Dans le second, on obtient immédiatement la forme de X. Pour le premier cas, on vérifie que $x^2 - x - I_2$ est un polynôme annulateur de X. Montrer que si $e \in \mathbb{Q}^2$ est un vecteur non nul, alors (e, Xe) est une base de $\mathbb{Q}^2$ et montrer alors que X est conjugué (dans $GL_2(\mathbb{Q})$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Lorsque $n = 3$, montrer que soit $a = 3$ et $b = c = 0$, soit $a = 1$ et $b = c = 1$. Le premier cas fournit immédiatement la forme de X. Pour le second cas, utiliser le théorème des noyaux (sur $\mathbb{Q}$ et non sur $\mathbb{R}$!!). En considèrant l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{Q}^3$ est X, montrer que $u_{|\ker(X^2-X-I)}$ est un endomorphisme sur un espace de dimension 2 et qu'il satisfait à l'équation $Y^3 - 2Y^2 + I$ puis appliquer le cas $n = 2$.

   (c) Dans le cas général, montrer que $\dim\ker(X^2 - X - I)$ est pair. S'il est de dimension non nul, choisir un vecteur e_1 non nul, l'espace $\mathrm{Vect}(e_1, Xe_1)$ est de dimension 2 et stable par X, choisir alors un vecteur $e_2 \in \ker(X^2 - X - I)\setminus \mathrm{Vect}(e_1, Xe_1)$ et montrer que $\mathrm{Vect}(e_1, Xe_1, e_2, Xe_2)$ est de dimension 4, choisir alors un vecteur $e_3 \in \ker(X^2 - X - I)\setminus \mathrm{Vect}(e_1, Xe_1, e_2, Xe_2)$, ...

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Montrer que A est diagonalisable. Soit a l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est A. Si F est stable par A, alors $a_{|F}$ est un endomorphisme et comme a est diagonalisable, $a_{|F}$ est aussi diagonalisable donc F est somme de sous-espaces propres.

2. Montrer que X commute avec A puis utiliser que chaque sous-espace propre de A est stable par X. Montrer alors que X est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ où λ est un réel et $Y \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et montrer que Y vérifie $Y^2 = -2I_2$. En déduire la forme de Y donc celle de X.

3. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable puis, avec $A = PDP^{-1}$, utiliser du calcul par bloc pour diagonaliser C

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Déterminer les valeurs propres possibles de A, ce qui fournit la forme de la trace et du déterminant. Utiliser ensuite que la trace est réelle pour obtenir que les multiplicités de toutes les valeurs propres sont identiques.

2. Déterminer les valeurs propres possibles de A, ce qui fournit la forme du déterminant. Utiliser ensuite que la trace est réelle pour obtenir que les multiplicités de toutes les valeurs propres non réelles sont identiques (on procède par l'absurde en supposant $a > b$ et en écrivant $\lambda^a\mu^b = \underbrace{(\lambda\mu)^a}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{\mu^{b-a}}_{\in\mathbb{C}})$

Indication pour l'exercice 1.4 : C'est un problème de moindre carré ($E = \mathbb{R}_3[X]$, $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$, $F = \mathbb{R}_2[X]$, $x_0 = X^3$ et $\inf_{P\in S} \int_0^1 (P(t))^2 dt = (d(x_0, F))^2$

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit l'équation $(E_{\mathbb{K}}) : X^3 - 2X^2 + I_n = 0_n$, où X est dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. La matrice X admet le polynôme $P(Y) = Y^3 - 2Y^2 + 1$ comme polynôme annulateur. Ce polynôme admet 1 comme racine évidente et en effectuant la division euclidienne de P par $Y - 1$, on obtient la factorisation suivante $P(Y) = (Y-1)(Y^2 - Y - 1)$. Le dernier facteur étant un trinôme dont les racines sont $y_{\pm} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, on en déduit que le polynôme $P(Y)$ est annulateur de X et il est, en outre, scindé sur $\mathbb{R}$ (i.e. admet toutes ses racines sur $\mathbb{R}$) à racines simples donc X est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, il existe trois entiers p, q, r tels que $p+q+r = n$ ainsi qu'une matrice P inversible telle que
$$X = P \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & y_+ I_q & 0 \\ 0 & 0 & y_- I_r \end{pmatrix} P^{-1}$$
(p désigne la multiplicité géométrique de 1, c'est-à-dire la dimension de l'espace propre associé à 1, q la multiplicité géométrique de y_+ et r la multiplicité géométrique de y_-).
Réciproquement, si X est de la forme $X = P \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & y_+ I_q & 0 \\ 0 & 0 & y_- I_r \end{pmatrix} P^{-1}$, un calcul direct montre que $X^3 - 2X^2 + I_n = 0$ (puisque $X^k = P \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & (y_+)^k I_q & 0 \\ 0 & 0 & (y_-)^k I_r \end{pmatrix} P^{-1}$

2. On suppose désormais que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

   (a) Si l'on voit X comme une matrice à coefficients réels, la question 1 nous donne la réduction de X ce qui montre immédiatement que
$$\mathrm{tr}(X) = p + qy_+ + ry_- \quad \text{et} \quad \det(X) = (y_+)^q (y_-)^r$$
(remarquons que p, q, r sont des entiers naturels). D'autre part, puisque X est à coefficients rationnels, sa trace et son déterminant sont aussi à coefficients rationnels. Or l'égalité
$$\mathrm{tr}(X) = p + qy_+ + ry_- = \frac{2p+q+r}{2} + \frac{q-r}{2}\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{q-r}{2}\sqrt{5} = \mathrm{tr}(X) - \frac{2p+q+r}{2}$$
implique que $\dfrac{q-r}{2}\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Si $q - r \neq 0 \Leftrightarrow q \neq r$ alors on peut diviser par $\dfrac{q-r}{2}$ et le réel $\sqrt{5}$ est rationnel, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, $q = r$ et l'on a :
$$\mathrm{tr}(X) = \frac{2p+2q}{2} = p + q \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \det(X) = (y_+)^q (y_-)^q = (y_+ y_-)^q = (-1)^q \in \{-1, 1\}$$
puisque le produit des racines du trinôme $Y^2 - Y - 1$ est égal à son coefficient constant.

   (b) Résolution lorsque $n = 2$: Nous savons que les entiers naturels p, q, r vérifie les relations $p + q + r = 2$ (par définition de p, q, r) et que $q = r$ (d'après la question 2.a)) donc $p + 2q = 2$. Par conséquent, soit $q = 0$ et $p = 2$, soit $q = 1$ et $p = 0$ (si $q \neq 0$ alors $q \geqslant 1$ donc $2 = p + 2q \geqslant p + 2 \Rightarrow 0 \geqslant p$ et p est un entier naturel).
Premier cas $p = 2$ et $q = 0$: Alors la matrice X, qui est de taille 2, admet la valeur propre $1 \in \mathbb{Q}$ dont la multiplicité est 2, qui est la taille de la matrice X. Par conséquent, la matrice X est diagonalisable et il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{Q})$ telle que $X = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PI_2P^{-1} = I_2$. Réciproquement, il est immédiat que la matrice I_2 vérifie bien l'équation $X^3 - 2X^2 + I_2 = 0$
Deuxième cas $p = 0$ et $q = 1$: Dans ce cas, 1 n'est pas valeur propre de X donc la matrice $X - I_2$ est inversible et l'égalité
$$0 = X^3 - 2X^2 + I_2 = (X - I_2)(X^2 - X - I_2)$$
implique que $X^2 - X - I_2 = 0$. Soit e un vecteur de $\mathbb{Q}^2$ non nul, montrons que la famille (e, Xe) est une base de $\mathbb{Q}^2$ ou, ce qui revient au même, que la famille (e, Xe) est une famille libre. Si ce n'est pas le cas, étant donné que e est un vecteur non nul, le vecteur Xe est colinéaire au vecteur e donc il existe un rationnel λ tel que $Xe = \lambda e$. Il est alors immédiat que
$$X^2 e = X(Xe) = X(\lambda e) = \lambda X e = \lambda^2 e \Rightarrow (X^2 - X - I_2)e = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - \lambda - 1)\underbrace{e}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Ainsi le rationnel λ est solution de l'équation de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ dont les seules racines, dans $\mathbb{R}$, sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ dont aucune n'est rationnel. Par conséquent, la famille (e, Xe) est libre dans $\mathbb{Q}^2$ donc c'est une base de $\mathbb{Q}^2$.
Pour une meilleure compréhension, note $e_1 = e$ et $e_2 = Xe$ alors on a

$$Xe_1 = Xe = e_2 \quad \text{et} \quad Xe_2 = X(Xe) = X^2 e = Xe + e = e_2 + e_1$$

Si l'on désigne par P la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{Q}^2$ à la base (e_1, e_2), on a

$$X = P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Réciproquement, si $P \in GL_2(\mathbb{Q})$ alors je laisse le soin au lecteur de vérifier que $X^2 - X - I_2 = 0$ donc $(X - I_2)(X^2 - X - I_2) = 0$, c'est-à-dire que $X^3 - 2X^2 + I_2 = 0$.
Conclusion : Ainsi, l'ensemble des solutions de $(E_{\mathbb{Q}})$ est l'ensemble

$$\left\{ P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P \in GL_2(\mathbb{Q}) \right\} \cup \{I_2\}$$

Résolution lorsque $n = 3$: Comme précédemment, on dispose de l'égalité $p + 2q = 3$ donc p est nécessairement impair, ce qui implique que $p = 1$ (donc $q = 1$) ou $p = 3$ (donc $q = 0$)
Premier cas $p = 3$ et $q = 0$: comme dans le cas $n = 2$, on en déduit que $X = I_3$ est la seule et unique solution de l'équation (E).
Deuxième cas $p = 1$ et $q = 1$: Puisque $P(Y) = Y^3 - 2Y^2 + 1$ est un polynôme annulateur de X et que l'on dispose de la factorisation suivante $P(Y) = (Y - 1)(Y^2 - Y - 1)$ en produit d'irréductibles sur $\mathbb{Q}[Y]$, le théorème des noyaux nous donne

$$\mathbb{Q}^3 = \ker(X - I_3) \oplus \ker(X^2 - X - I_3).$$

Etant donné que $p = \dim(X - I_3) = 1$, on en déduit que $\dim \ker(X^2 - X - I_3) = 2$. On fixe une base (e_1) de $\ker(X - I_3)$. Soit e_2 un vecteur non nul de $\ker(X^2 - X - I_3)$, alors en utilisant le raisonnement du cas $n = 2$, $q = 1$, on montre que la famille (e_2, Xe_2) est une famille libre de $\ker(X^2 - X - I_3)$ (par définition $(X^2 - X - I_3)e_2 = 0$ et le fait que $Xe_2 \in \ker(X^2 - X - I_3)$ est laissé au lecteur). L'espace $\ker(X^2 - X - I_3)$ étant de dimension 2, il est immédiat que (e_2, Xe_2) est une base de $\ker(X^2 - X - I_3)$. Si l'on note $e_3 = Xe_2$, la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{Q}^3$ (par regroupement de bases de sous-espaces en somme directe) et l'on a :

$$Xe_1 = e_1, \quad Xe_2 = e_3 \quad Xe_3 = e_3 + e_2$$

En introduisant la matrice de changement de base de la base canonique dans la base (e_1, e_2, e_3), on a

$$X = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et je laisse le lecteur vérifier que pour toute matrice $P \in GL_3(\mathbb{Q})$, la matrice $X = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ est solution de l'équation $X^3 - 2X^2 + I_3 = 0$.
Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $(E_{\mathbb{Q}})$ est l'ensemble

$$\left\{ P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P \in GL_2(\mathbb{Q}) \right\} \cup \{I_3\}$$

(c) La résoudre dans le cas général

Correction de l'exercice 1.2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.
2. Résoudre dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$.

3. Soit B une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et C la matrice de $\mathfrak{M}_{3n}(\mathbb{R})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 2A & 2A & A \\ A & 3A & A \\ A & 2A & 2A \end{pmatrix}$.

   Montrer que si A est diagonalisable alors C l'est aussi.

Correction de l'exercice 1.3 :

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$. Déterminer $\operatorname{tr} A$ et $\det A$.
2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que $\det A > 0$.

Correction de l'exercice 1.4 : Soit S l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $\inf\limits_{P \in S} \int_0^1 (P(t))^2 dt$.