1 Exercices

Exercice 1.1 Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Expliciter une matrice $P_0 \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tP_0P_0$.
2. Justifier l'existence d'une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et d'une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$
3. Si M est une matrice symétrique de taille 3, on note $\lambda_1(M) \leqslant \lambda_2(M) \leqslant \lambda_3(M)$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre croissant.
   Comparer pour tout $k \in [\![1,3]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i(A+B)$ et $\sum\limits_{i=1}^{k} (\lambda_i(A) + \lambda_i(B))$

Exercice 1.2 Soit S_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le coefficient constant est égal à 1. On note $\delta_n = \inf\limits_{P \in S_n} \int_0^1 (P(t))^2 dt$.
Déterminer δ_1, δ_2 et δ_3.
Justifier rapidement que, lorsque n est un entier naturel quelconque, que δ_n est atteint.

Exercice 1.3

1. Caractériser géométriquement la matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer, dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, toutes les racines cubiques de A.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. A est symétrique donc diagonalisable en BON, écrire la matrice diagonale sous la forme d'un carré et distribuer un facteur sur P et l'autre sur ${}^tP$
2. La matrice $({}^tP_0)^{-1}BP_0^{-1}$ est symétrique donc on peut la réduire en BON, ce qui fournit la matrice P pour B et vérifier que ce choix permet d'écrire $A = {}^tPP$
3. Montrer que la matrice P précédente peut être choisie triangulaire supérieure (orthonormaliser par Schmidt les vecteurs colonnes de A et vérifier que la matrice de changement de base de la base canonique dans cette nouvelle base peut être choisie comme matrice P_0). Ensuite, considérer $((A+B)x, x)$ lorsque $x = e_1$ puis $x = e_2$ puis $x = e_3$, où les e_i sont les vecteurs propres de $A+B$

Indication pour l'exercice 1.2 : C'est un problème de moindre carré ($E = \mathbb{R}_n[X]$, $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, $F = \mathrm{Vect}(X, .., X^n)$, $x_0 = 1$ et $\inf_{P \in S_n} \int_0^1 (P(t))^2 dt = (d(x_0, F))^2$

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. ${}^tAA = 81I_3$ donc $\dfrac{1}{9}A$ est orthogonale
2. $X^3 = A$ implique que X et A commutent. En particulier, l'unique espace propre $\mathrm{Vect}(e)$ de A ainsi que le plan de rotation de A sont stables par X. La matrice X est donc semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} -\sqrt[3]{9} & 0 \\ 0 & -\sqrt[3]{9}Y \end{pmatrix}$, où $Y \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérfie Y^3 est une rotation. Montrer que Y est également une rotation, ce qui fournit la forme de Y donc de X

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)