1 Exercices

Exercice 1.1

1. Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ selon les valeurs de α et β.
2. Nature de la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^a(\ln n)^b}\right)$ où $a>0$ et $b>0$.

Exercice 1.2 Soit une suite (a_n) telle que $a_0>0$, $a_1>0$ et pour tout $n>0$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{2a_{n-1}}{n+1}$.

1. Déterminer la limite de la suite (a_n).
2. Existence de la limite de la suite $(\dfrac{a_n}{n^2})$.

Exercice 1.3 Donner l'équivalent de $C_{2n}^n=\binom{2n}{n}$ lorsque $n\to+\infty$ (sans recourir à la formule de Stirling bien entendu)

Exercice 1.4 Soit un réel $a>0$. On suppose que $u_0>0$ et $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{n^a u_n}$.

1. Trouver une condition sur a pour que la suite (u_n) converge.
2. Donner un équivalent simple de $u_n-\lambda$ si (u_n) tend vers λ, et de u_n si la suite diverge.

Exercice 1.5

1. Etudier la suite $u=(u_n)$ définie par $u_0>0$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+u_n}$
2. Donner les 3 premiers termes de son développement asymptotique

Exercice 1.6

1. Nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$.
2. Calculer la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ (on pourra considérera $\sum\limits_{k=1}^{2N}\dfrac{\ln k}{k}+\sum\limits_{k=1}^{2N}(-1)^k\dfrac{\ln k}{k}$)

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Si $\alpha > 1$, utiliser le fait que $\ln n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{\varepsilon})$ pour obtenir une domination de $\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ par une série de Riemann convergente.
   Si $\alpha = 1$, utiliser la comparaison série intégrale.
   Si $\alpha < 1$, utiliser utiliser que $\ln n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{\varepsilon})$ pour obtenir une minoration de $\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ par une série de Riemann divergente.

2. Montrer que si $a > 1$, il y a convergence absolue (par un premier équivalent simple).
   si $a \leqslant 1$, utiliser un DL_2 pour obtenir que le terme général est somme d'une série dont on connait la convergence (d'après la question précédente) et d'un terme complémentaire qui est équivalent à au terme générale d'une série positive dont on donnera la nature de la série correspondante (toujours avec la question 1). Pour finir, utiliser le fait que série "convergente+divergente" = série ...., etc.

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Justifier la monotonie de la suite (on n'oubliera pas de trouver le signe de la suite). Pour conclure, procéder par l'aburde et supposer la convergence. En déduire que la série $a_{n+1} - a_n$ est équivalent à une série de Riemann divergente et conclure.

2. Justifier la monotonie de la suite $(\dfrac{a_n}{n^2})$. Montrer ensuite qu'elle est bornée en majorant a_{n+1} par $(1 + \dfrac{2}{n+1})a_n$ et, en déduisant de cette majoration, une majoration explicite de a_n par une expression dépendant uniquement de n.

Indication pour l'exercice 1.3 : Etant donné de $\binom{2n}{n}$ est une expression multiplication, considérer son logarithme. En posant $x_n = \ln\binom{2n}{n}$, obtenir un équivalent simple de $x_{n+1} - x_n$ et utiliser les résultats sur les sommes partielles de séries divergentes. Obtenir alors un équivalent a_n de x_n. Introduire alors la suite $z_n = x_n - a_n$, recourrir au procédé précédent et obtenir un équivalent de z_n (selon la convergence ou la divergence de la série, utiliser les restes partielles de séries convergentes ou les sommes partielles de séries divergentes). Itérer le processus jusqu'à l'obtention d'une série convergente. Utiliser alors le théorème sur les restes partielles des séries convergentes pour en déduire que $x_n = a_n + b_n + \cdots + o(1)$ (obtention du terme tendant vers 0). Passer alors à l'exponentielle et utiliser que $\binom{2n}{n} = \exp(a_n)\exp(b_n)\cdots\exp(o(1))$. En tenant compte que $\exp(o(1)) \to 1$, en déduire l'équivalent tant attendu.
On pourrait s'amuser de même avec $n!$ pour retrouver très naturellement la formule de Stirling.

Indication pour l'exercice 1.4 :

1. Etudier la monotonie de la suite u, en déduire un majorant simple de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire une condition suffisante sur a.
   Pour la réciproque, en prenant la condition complémentaire sur a, procéder par l'absurde. Supposer que la suite u soit majorée, en déduire sa convergence puis un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ et obtenir une contradiction.

2. Dans le cas de la convergence, obtenir un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ et utiliser le théorème sur les restes de séries convergente.
   Dans le cas de la divergence, élevé au carré la relation de récurrence, en déduire un équivalent simple de $(u_{n+1})^2 - (u_n)^2$. Selon les conditions nécessaires sur a pour obtenir la convergence ou la divergence sur la série $\sum_n (u_{n+1})^2 - (u_n)^2$, utiliser respectivement le théorème sur les restes partielles de séries convergentes ou le théorème sur les sommes partielles de séries divergentes (ne pas oublié que ces théorèmes fournissent en premier lieu la convergence ou la divergence de la selon $\sum_n (u_{n+1})^2 - (u_n)^2$ donc la convergence ou la divergence de la suite $(u_{n+1})^2$)

Indication pour l'exercice 1.5 :

1. Justifier la signe et la monotonie de la suite. Supposer ensuite que la suite u est majorée pour en justifier la convergence et en déduire la limite. Aboutir à une contradiction

2. Déterminer l'unique réel $a > 0$ tel que la suite $(u_{n+1})^a - (u_n)^a$ admette une limite L finie et non nulle. En utilisant les théorèmes sur les sommes partielles de séries divergentes, obtenir un équivalent simple a_n de u_n. Introduire alors la suite $v_n = u_n - a_n$ et étudier la convergence de la série $\sum_n v_{n+1} - v_n$ (que l'on simplifiera au mieux par des DL et des équivalents). En utilisant de nouveau les théorèmes sur les restes (resp. sommes) partielles de séries convergentes (resp. divergentes), obtenir un équivalent b_n de v_n. Itérer une seconde fois ce processus en posant $w_n = v_n - b_n = u_n - a_n - b_n$ pour obtenir un équivalent de w_n et dérouler pour obtenir un DAS de la forme $u_n = a_n + b_n + c_n + o(c_n)$

Indication pour l'exercice 1.6 :

1. Pour la première, comparaison série-intégrale, pour la seconde, ...faut pas pousser :=) (on justifiera néanmoins proprement la décroissance de $\frac{\ln n}{n}$)

2. Utiliser l'indication en simplifiant que $\sum_{k=1}^{2N} \frac{\ln k}{k} + \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ (seul les pairs restes) ce qui amène à considérer $\sum_{0 \leqslant k \leqslant N} \frac{\ln(2k)}{2k}$ et en utilisant que $\ln(2k) = \ln k + \ln 2$, en déduire l'expression de $\sum_{k=1}^{2N} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ en fonction de $\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln k}{k}$, $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$et $\sum_{k=1}^{2N} \frac{\ln k}{k}$
   Utiliser alors le DAS de $\sum_{k=1}^{2N} \frac{\ln k}{k}$ et de $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ de la forme $A_N + o(1)$ pour obtenir que

$$\sum_{k=1}^{2N} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = A + o(1)$$

   (pour l'équivalent a_N (resp. b_N) de $\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln k}{k}$ (resp. $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$), utiliser la comparaison série-intégrale) puis poser $a'_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{\ln k}{k} - a_N$ (resp. $b'_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - b_N$) et justifier la convergence des séries $\sum_N a'_{N+1} - a'_N$ et $\sum_N b'_{N+1} - b'_N$. Utiliser alors le théorème sur les restes partielles de séries convergentes (n'oubliez pas que la convergence de ces deux séries implique celles des deux suites (a'_N) et (b'_N)) pour obtenir un équivalent de b'_N et a'_N puis le DAS à deux termes de a_N et b_N

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :
Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.4 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.5 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.6 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)