1 Exercices

Exercice 1.1 Soit f une application continue sur $]0,+\infty[$, intégrable sur $]0,+\infty[$ et décroissante.
On pose $S(h) = h \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(nh)$ pour $h > 0$.

1. Justifier la convergence simple sur $]0,+\infty[$. A-t-on convergence uniforme sur $]0,+\infty[$? sur $[A,+\infty[$?
2. Montrer que $S(h)$ tend vers $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$ quand h tend vers 0.
3. Application : Soit $0 < \alpha < 1$. On pose $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^{1-\alpha}}$. Etudier la définition de F.
   Donner un équivalent simple de F en 1.

Exercice 1.2

1. Calculer $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n+3}$.
2. Exprimer $B = \int\limits_0^1 \dfrac{\arctan t}{\sqrt{t}} dt$ à l'aide de A.
3. Montrer que $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{t}}{\arctan t} dt > \dfrac{1}{B}$.

Exercice 1.3 On considère les fonctions $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n e^{-nt}}{n}$ et $g(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-nt}}{n}$

1. Donner le domaine de chacune de ces fonctions.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de chacune de ces fonctions sur leurs ensemble de définition respectifs
3. Donner un équivalent de f et g en $+\infty$. Donner un équivalent de g en 0

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Utiliser la comparaison série-intégrale en comparant non pas sur $[n, n+1]$ mais sur $[nh, (n+1)h]$. En déduire la convergence simple (tous les termes de la somme sont positifs). La convergence uniforme en résulte sur $[A, +\infty[$ (puisque $\int_{Nh}^{+\infty} f(t)dt \leqslant \int_{nA}^{+\infty} f(t)dt$). Procéder par l'absurde sur $]0, +\infty[$ en utilisant les comparaisons sur les sommes finies, en posant $h = \dfrac{1}{N}$ (où N est le plus grand indice de la somme finie)
2. Utiliser l'encadrement résultant de la comparaison série-intégrale (sur la somme de la série) et faire tendre h vers 0.
3. Utiliser la question précédente avec la fonction $f(y) = e^y y^{-\alpha}$ avec $h = \ln x$

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Utiliser que $\dfrac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n dt$ et montrer que A est une intégrale (justifier la permutation série-intégrale, soit par convergence uniforme, soit en considérant les sommes finies) puis calculer cette intégrale
2. Utiliser le développement en série de $\arctan t$ (dérivée $\arctan t$, le développer puis intégrer, en justifiant si nécessaire la permutation série-intégrale) pour obtenir l'expression de B en fonction de A.
3. Cauchy-Schwartz appliqué à deux fonctions convenables

Indication pour l'exercice 1.3 : On considère les fonctions $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n e^{-nt}}{n}$ et $g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-nt}}{n}$

1. Les divergences grossières sont évidentes. Pour quasiment tous les autres cas, une majoration par une suite géométrique convenable convient.
2. Application directe du théorème de continuité et de dérivabilité sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
   Pour la dérivabilité en 0, utiliser le théorème de prolongement continu de la dérivée (f' et g' peuvent s'écrirent comme des fractions pour lesquelles la limite lorsque $x \to 0$ est évidente)
3. En $+\infty$, f et g sont sommes de termes qui décroissent de plus en plus vite vers 0 en $+\infty$ donc, intuitivement, leurs équivalents respectifs sont le premier terme. Pour le justifier proprement, effectuer la division de la fonction par son équivalent puis justifier la possibilité de permuter limite et série.
   En 0 pour g, une comparaison série-intégrale, pour x fixé, résoud le problème

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)