1 Exercices

Exercice 1.1 On pose $F(x) = \int_0^1 \ln\left(\frac{1+tx}{1-tx}\right)\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}$.
Existence, continuité, dérivabilité, calcul.

Exercice 1.2 Soients $a \in \mathbb{R}^\times$ et $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+a^2t^2)}dt$.

1. Définition, continuité, caractère C^1 de f.
2. Calculer f.

Exercice 1.3 Soit $x \in]0,+\infty[$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\frac{x}{t})}{1+t^2}dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}$.
2. Donner un équivalent de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\frac{x}{t})}{1+t^2}dt$ lorsque $x \to 0$.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Pour l'existence de l'intégrale, puisque $t \in [0,1]$, il suffit d'exiger que $\dfrac{1+x}{1-x}$ et $\dfrac{1-x}{1+x}$ soient positifs au sens large (pour que le ln existe !!). Lorsqu'il y a positivité stricte, c'est évident (une simple continuité) et lorsqu'il y a égalité, on obtient une légère singularité que l'on tue en remarquant que $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$, que $1 - t^2 = (1-t)(1+t)$et que $\ln(1-x) = o(\dfrac{1}{(1-x)^a})$ pour $a > 0$ quelconque au voisinage de 1)
La dérivabilité s'obtient par les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe $\int$ (Lebesgue). Pour la majoration uniforme, se placer sur des intervalles $[-a, a]$ avec $a < 1$.
La dérivée est donnée alors par $F'(x) = 2\int_0^1 \dfrac{1}{1-t^2x^2}\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Effectuer le changement de variable $t = \cos u$, $u \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ pour aboutir à une fraction rationnelle en $\cos u$, on revoit son cours de sup pour l'intégrer, ce qui fournit une expression explicite (sans symbole $\int$) de $F'(x)$. L'expression explicite de F en résulte (on connait $F(0)$)

Indication pour l'exercice ?? :

1. Pour le domaine de définition, remarquer que $|\arctan t| \leqslant |t|$ (le justifier)
   La continuité et la dérivabilité en résulte directement sur tout segment $[-a, a]$ par les théorèmes généraux sur les intégrales à paramètres (Lebesgue)
2. Oh $f'(x)$ est une belle intégrale de fractions rationnelles. La décomposition en éléments simples est relativement simple (pensez que x est fixé). Pensez à intégrer sur $[0, A]$ (pour éviter les divergences), simplifier au mieux $\int_0^A$ puis faire tendre A vers $+\infty$ (normalement, si le travail est mené convenablement, la limite tombe d'emblée).
   La fonction $f'(x)$ est donc expliciter sans symbole $\int$ et le calcul de f en découle directement ($f(0)$ est connu explicitement)

Indication pour l'exercice 1.3 : Soit $x \in]0, +\infty[$.

1. Justifier que $x \mapsto \int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(\frac{x}{t})}{1+t^2}dt$ est C^1 sur $[a, +\infty[$ (Lebesgue) et calculer sa dérivée. On aboutit à une belle fraction rationnelle que l'on décompose en éléments simples. Des divergences apparaissent : pour les contourner, intégrer sur $[0, A]$, simplifier au mieux, puis faire tendre A vers $+\infty$.
   Quand à la seconde intégrale, sa dérivée est .... (revoir le cours de sup)
   Les deux fonctions ont donc même dérivée donc elles diffèrent à une constante additive près que l'on déterminer en fixant $x = 0$
2. Utiliser l'égalité précédente, donner un équivalent en 0 de $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2 - 1}$ et en déduire un équivalent de $\int_0^x \dfrac{\ln t}{t^2-1}dt$

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice ?? :
Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)