1 Exercices

Exercice 1.1 1. Montrer que l'équation $(E) : xy" + y' + xy = 0$ admet des solutions développables en série entière que l'on explicitera.

2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(x \sin t)$.
   Montrer que g est solution de (E).
   Montrer que g est développable en série entière; on explicitera ses coefficients.

Exercice 1.2 On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.
Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter ce développement. Déterminer le rayon de convergence.

Exercice 1.3 1. Montrer que la fonction $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{te^{-t}}{(1 - xte^{-t})^2} dt$ est développable en série entière au voisinage de 0

2. Expliciter son développement en série entière.

3. Rayon de convergence du développement

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Montrer que l'équation $(E) : xy" + y' + xy = 0$ admet des solutions développables en série entière que l'on explicitera.
2. Soit $g : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t)$.
   Montrer que g est solution de (E).
   Montrer que g est développable en série entière; on explicitera ses coefficients.

Indication pour l'exercice 1.2 : On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.
Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter ce développement. Déterminer le rayon de convergence.

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Montrer que la fonction $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1 - xte^{-t})^2} dt$ est développable en série entière au voisinage de 0
2. Expliciter son développement en série entière.
3. Rayon de convergence du développement

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. Montrer que l'équation $(E) : xy" + y' + xy = 0$ admet des solutions développables en série entière que l'on explicitera.
2. Soit $g : x \mapsto \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(x\sin t)$.
   Montrer que g est solution de (E).
   Montrer que g est développable en série entière; on explicitera ses coefficients.

Correction de l'exercice 1.2 : On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.
Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter ce développement. Déterminer le rayon de convergence.

Correction de l'exercice 1.3 :

1. Montrer que la fonction $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1 - xte^{-t})^2} dt$ est développable en série entière au voisinage de 0
2. Expliciter son développement en série entière.
3. Rayon de convergence du développement