1 Exercices

Exercice 1.1 On considère l'équation différentielle $y'(x) = (y^3(x) - y(x))^{3/2}$ avec $y(0) = a$
Soit (φ_a, I_a) la solution maximale, si elle existe (I_a étant son intervalle de définition)

1. On suppose que $a \in]-1, 0[$
   (a) Justifier l'existence de φ_a
   (b) Montrer que $\forall x \in I_a, \quad -1 < y(x) < 0$.
   (c) Justifier que $I_a = \mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi_a(x)$ existe.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_a(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi_a(x)$.
2. Proposer l'étude de la solution φ_a alors que $a > 1$.

Exercice 1.2 Soit q continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et E l'espace des solutions de l'équation différentielle $x'' = qx$.

1. Montrer qu'il existe $x_1 \in E$ telle que $x_1(0) = x_1'(0) = 1$.
   Montrer que $\forall t \geqslant 0, \quad x_1(t) \geqslant t + 1$.
2. Soit $x_2(t) = x_1(t) \int\limits_t^{+\infty} \dfrac{du}{x_1(u)^2}$. Montrer que $x_2 \in E$ et que x_2 est bornée.
3. Quel est l'ensemble des éléments bornés de E ?

Exercice 1.3 Soit q une application strictement positive, strictement croissante et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que toute solution de $y" + qy = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Soit dans la suite y une solution non nulle.
2. On pose $q(0) = \omega_0^2$. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de $\sin(\omega_0 t + \phi)$, il existe toujours un zéro de y.
   En déduire une majoration de la distance de deux zéros consécutifs de y.
3. On suppose à présent que $\lim\limits_{+\infty} q = \omega_1^2$.
   (a) Déterminer une minoration de la distance de deux zéros consécutifs de y.
   (b) Déterminer un équivalent de $N(x) = \{t \in [0, x]$ tel que $y(t) = 0\}$.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : On considère l'équation différentielle $y'(x) = (y^3(x) - y(x))^{3/2}$ avec $y(0) = a$
Soit (φ_a, I_a) la solution maximale, si elle existe (I_a étant son intervalle de définition)

1. On suppose que $a \in]-1, 0[$
   (a) Justifier l'existence de φ_a
   (b) Montrer que $\forall x \in I_a, \quad -1 < y(x) < 0$.
   (c) Justifier que $I_a = \mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi_a(x)$ existe.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_a(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi_a(x)$.
2. Proposer l'étude de la solution φ_a alors que $a > 1$.

Indication pour l'exercice 1.2 : Soit q continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et E l'espace des solutions de l'équation différentielle $x'' = qx$.

1. Montrer qu'il existe $x_1 \in E$ telle que $x_1(0) = x_1'(0) = 1$.
   Montrer que $\forall t \geqslant 0, \quad x_1(t) \geqslant t + 1$.
2. Soit $x_2(t) = x_1(t) \int_t^{+\infty} \dfrac{du}{x_1(u)^2}$. Montrer que $x_2 \in E$ et que x_2 est bornée.
3. Quel est l'ensemble des éléments bornés de E ?

Indication pour l'exercice 1.3 : Soit q une application strictement positive, strictement croissante et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que toute solution de $y" + qy = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Soit dans la suite y une solution non nulle.
2. On pose $q(0) = \omega_0^2$. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de $\sin(\omega_0 t + \phi)$, il existe toujours un zéro de y.
   En déduire une majoration de la distance de deux zéros consécutifs de y.
3. On suppose à présent que $\lim\limits_{+\infty} q = \omega_1^2$.
   (a) Déterminer une minoration de la distance de deux zéros consécutifs de y.
   (b) Déterminer un équivalent de $N(x) = \{t \in [0, x] \text{ tel que } y(t) = 0\}$.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : On considère l'équation différentielle $y'(x) = (y^3(x) - y(x))^{3/2}$ avec $y(0) = a$
Soit (φ_a, I_a) la solution maximale, si elle existe (I_a étant son intervalle de définition)

1. On suppose que $a \in]-1, 0[$
   (a) Justifier l'existence de φ_a
   (b) Montrer que $\forall x \in I_a, \quad -1 < y(x) < 0$.
   (c) Justifier que $I_a = \mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi_a(x)$ existe.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_a(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi_a(x)$.
2. Proposer l'étude de la solution φ_a alors que $a > 1$.

Correction de l'exercice 1.2 : Soit q continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et E l'espace des solutions de l'équation différentielle $x'' = qx$.

1. Montrer qu'il existe $x_1 \in E$ telle que $x_1(0) = x_1'(0) = 1$.
   Montrer que $\forall t \geqslant 0, \quad x_1(t) \geqslant t + 1$.
2. Soit $x_2(t) = x_1(t) \int\limits_t^{+\infty} \dfrac{du}{x_1(u)^2}$. Montrer que $x_2 \in E$ et que x_2 est bornée.
3. Quel est l'ensemble des éléments bornés de E ?

Correction de l'exercice 1.3 : Soit q une application strictement positive, strictement croissante et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que toute solution de $y" + qy = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Soit dans la suite y une solution non nulle.
2. On pose $q(0) = \omega_0^2$. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de $\sin(\omega_0 t + \phi)$, il existe toujours un zéro de y.
   En déduire une majoration de la distance de deux zéros consécutifs de y.
3. On suppose à présent que $\lim\limits_{+\infty} q = \omega_1^2$.
   (a) Déterminer une minoration de la distance de deux zéros consécutifs de y.
   (b) Déterminer un équivalent de $N(x) = \{t \in [0, x] \text{ tel que } y(t) = 0\}$.