1 Exercices

Exercice 1.1 Soit $f : (x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2} \arctan y, y + \frac{1}{3} \arctan x)$.
Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.2

1. Montrer que $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{rg} M \leqslant r\}$ est un fermé.
2. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C});\ MA = AM\}$.
   On suppose que l'assertion $(\mathcal{R})$: " pour toute matrice A diagonalisable, $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$ " est vraie.
   (a) Montrer que $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$.
   (b) Justifier la véracité de l'assertion $(\mathcal{R})$.

Exercice 1.3 On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ d'équation $x(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$ et $y(t) = t^2 + \frac{1}{t}$.
Montrer qu'il s'agit d'un fermé $\mathbb{R}^2$. Est-ce un compact ? Déterminer ses composantes connexes.

Exercice 1.4 On munit l'espace $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la distance induite par la norme infinie.

1. Soit $g \in E$, montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2} f(x^2) + g(x)$ admet une et une seule solution $f_0 \in E$
2. Montrer que l'application $g \mapsto f_0$ est un homéomorphisme de E.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Soit $f : (x, y) \mapsto (x + \dfrac{1}{2} \arctan y, y + \dfrac{1}{3} \arctan x)$.
Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Montrer que $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{rg} M \leqslant r\}$ est un fermé.
2. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C});\, MA = AM\}$.
   On suppose que l'assertion $(\mathcal{R})$: " pour toute matrice A diagonalisable, $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$ " est vraie.
   (a) Montrer que $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$.
   (b) Justifier la véracité de l'assertion $(\mathcal{R})$.

Indication pour l'exercice 1.3 : On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ d'équation $x(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$ et $y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t}$.
Montrer qu'il s'agit d'un fermé $\mathbb{R}^2$. Est-ce un compact ? Déterminer ses composantes connexes.

Indication pour l'exercice 1.4 : On munit l'espace $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la distance induite par la norme infinie.

1. Soit $g \in E$, montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2} f(x^2) + g(x)$ admet une et une seule solution $f_0 \in E$
2. Montrer que l'application $g \mapsto f_0$ est un homéomorphisme de E.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Soit $f : (x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}\arctan y, y + \frac{1}{3}\arctan x)$.
Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 1.2 :

1. Montrer que $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{rg} M \leqslant r\}$ est un fermé.
2. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}); MA = AM\}$.
On suppose que l'assertion $(\mathcal{R})$: " pour toute matrice A diagonalisable, $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$ " est vraie.
   (a) Montrer que $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$.
   (b) Justifier la véracité de l'assertion $(\mathcal{R})$.

Correction de l'exercice 1.3 : On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ d'équation $x(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$ et $y(t) = t^2 + \frac{1}{t}$.
Montrer qu'il s'agit d'un fermé $\mathbb{R}^2$. Est-ce un compact ? Déterminer ses composantes connexes.

Correction de l'exercice 1.4 : On munit l'espace $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la distance induite par la norme infinie.

1. Soit $g \in E$, montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}f(x^2) + g(x)$ admet une et une seule solution $f_0 \in E$
2. Montrer que l'application $g \mapsto f_0$ est un homéomorphisme de E.