1 Exercices

Exercice 1.1 Donner la différentielle de

1. $X \mapsto < AX, BX >$ où A et $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$
2. $f : X \mapsto {}^tXMX$ où $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$
3. $X \mapsto X^3$ où $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 1.2 Soit $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |||d\phi_x||| < 1$. On pose $f = \mathrm{Id} + \phi$.

1. Montrer que, pour tout $\rho > 0$, il existe $C_\rho \in [0, 1[$ tel que :
$$\forall (x, y) \in \overline{B(0, \rho)}^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \geqslant (1 - C_\rho)\|x - y\|.$$
2. Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et fermé.
3. En déduire que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.3 On munit $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit f une fonction C^1, croissante, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.
On pose $F(x) = f(\|x\|)x$ pour tout x de E.

1. Montrer que F est C^1 et exprimer sa différentielle.
2. Montrer que pour tous x, h de E : $\|F'(x).h\| \geqslant f(\|x\|)\|h\|$.
3. Montrer que F est un C^1-difféomorphisme de E sur E.

Exercice 1.4 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant k$. On pose

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + f(y), y + f(z), z + f(x)) \end{array}$$

Montrer que F est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Il suffit de revenir à la définition de la différentielle en calculant $f(X+H)$ comme la somme de $f(X)$, d'un terme linéaire en H et de termes de négligeable devant H (par exemple, H^2, etc).

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Utiliser l'inégalité des acrroissements finis à la fonction ϕ (sur chaque compact, justifier l'existence d'une constante K telle que $|||d\phi_x||| \leqslant K$) puis majorer $\|x-y\|$ à l'aide d'expression en f et en ϕ.
   Pour ceux qui ne connaissent pas l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à plusieurs variables, considérer pour chaque fonction composante ϕ_i de ϕ (i.e $\phi = (\phi_1, .., \phi_n)$), la fonction $g_i : t \mapsto \phi_i(tx + (1-t)y$, et je conseille au lecteur de calculer sa dérivée par l'utilisation des DL_1 afin de ne pas commettre d'erreurs dans la différentielle d'une composée) et lui appliquer l'inégalité classique des accroissements finis puis en déduire une majoration de $\|\phi(x) - \phi(y)\| \leqslant K\|x-y\|$ (en considérant par exemple la norme euclidienne)

2. Justifier que f est un C^1 difféomorphisme local. Pour cela, on montrera que $df_x.h = 0 \Rightarrow h = 0$ (on n'oubliera pas que $f = \mathrm{Id} + \phi$)
   En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert.
   Pour montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé, considérer une suite $y_n = f(x_n)$ de $f(\mathbb{R}^n)$ qui converge dans $\mathbb{R}^n$ et montrer que la suite (x_n) est de Cauchy.

3. Montrer l'injectivité de f, utiliser le théorème d'inversion globale et se rappeler quels sont les ensembles qui sont à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$.

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Utiliser les théorèmes de composition et multiplication des fonctions C^1 pour justifier que F est C^1 sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et en 0, utiliser le $\mathrm{DL}_1(0)$ de f pour justifier la différentiabilité de F en 0. Expliciter la différentielle de F en revenant à définition initiale de la différentielle ($F(x+h) = F(x) + A(h) + o(h)$, où $h \mapsto A(h)$ est une application linéaire, on explicitera le DL_1 de $x \mapsto \|x\| = \sqrt{<x, x>}$ puis on composera par le $\mathrm{DL}_1(0)$ de f). puis vérifier que $\lim\limits_{x \to 0} F'(x) = F'(0)$. Attention, pour cette dernière limite, il s'agit d'applications linéaires, donc on devra estimer la norme de la différence et plus précisément $\|F'(x).h - F'(0).h\|$ puis on passera à la norme subordonnée)

2. L'expression $F'(x).h$ (qui est un vecteur de $\mathbb{R}^n$) est la somme de deux vecteurs a et b et on utilisera le fait que $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 < a, b >$ pour en déduire l'inégalité demandée.Montrer que pour tous x, h de E : $\|F'(x).h\| \geqslant f(\|x\|)\|h\|$.

3. Utiliser l'inégalité précédente pour justifier que $F'(x)$ est bien une application linéaire injective (donc bijection puisque l'on est en égale dimension) pour en déduire que F est un C^1-difféomorphisme local.
   L'injectivité de F s'obtient en revenant à la définition $F(x) = F(y)$, en passant à la norme et en étudiant les variations de la fonction $t \mapsto tf(t)$.
   Pour montrer que $F(E) = E$, justifier que $F(E)$ est un ouvert (revoir si nécessaire la totalité du théorème d'inversion locale ou globale) et montrer que $f(E)$ est fermé. Pour cela, on considère une suite $y_n = F(x_n) = f(\|x_n\|)x_n$ de $F(E)$ qui converge dans E, puis on justifie que la suite $(x_n)_n$ est bornée (utiliser de nouveau la fonction $t \mapsto tf(t)$), extraire une sous-suite convergente et on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = F(x)$ pour un x convenable.

Indication pour l'exercice 1.4 : Vérifier d'abord que F est bien un C^1-difféomorphisme local.
Justifier ensuite l'injectivité de F (on reviendra à la définition primitive de l'injectivité et on utilisera à bon escient l'inégalité des accroissements finis sur la bonne fonction).
Montrer pour finir que $F(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ en montrant que $F(\mathbb{R}^3)$ est ouvert (relire si nécessaire la totalité du théorème d'inversion local ou global) et puis qu'il est fermé (pour cela, considérer une suite $Z_n = F(x_n, y_n, z_n)$ de $F(\mathbb{R}^3)$ convergente dans $\mathbb{R}^3$ et montrer que les trois suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et (z_n) sont bornées, extraire des sous-suites convergentes et en déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} Z_n = F(x, y, z)$ pour x, y, z convenables)

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. On note f l'application $X \mapsto < AX, BX >$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Pour tous les vecteurs X, H de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{array}{rcl} f(X+H) & = & < A(X+H), B(X+H) >=< AX+AH, BX+BH > \\ & = & \underbrace{< AX, BX >}_{=f(X)} + \underbrace{< AH, BX > + < AX, BH >}_{=df_X(H)} + \underbrace{< AH, BH >}_{=o(H)} \end{array}$$

Il est évident que l'application $H \mapsto < AH, BX > + < AX, BH >$ est $\mathbb{R}$-linéaire et elle est continue sur $\mathbb{R}^n$, soit en utilisant le fait que toute application linéaire en dimension finie est continue, soit en utilisant l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Cauchy-Schwartz ainsi que les normes subordonnées

$$\begin{array}{rcl} |< AH, BX > + < AX, BH >| & \leqslant & |< AH, BX >| + |< AX, BH >| \leqslant \|AH\| \|BX\| + \|AX\| \|BH\| \\ & \leqslant & |||A||| \|H\| |||B||| \|X\| + |||A||| \|X\| |||B||| \|H\| = 2 |||A||| |||B||| \|X\| \|H\| \end{array}$$

Il reste à montrer que l'expression $H \mapsto< AH, BH >$ est négligeable devant H (c'est-à-dire devant la norme $\|H\|$ de H)

$$|< AH, BH >| \leqslant \|AH\| \|BH\| \leqslant |||A||| \|H\| |||B||| \|H\| = |||A||| |||B||| \|H\|^2 = o(\|H\|)$$

Par conséquent, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, l'application f est différentiable en X et l'on a

$$df_X : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ X & \mapsto & (H \mapsto< AH, BX > + < AX, BH >) \end{array}$$

Remarquons pour finir, que l'on pourrait remplacer $\mathbb{R}^n$ par un espace de Hilbert quelconque $\mathcal{H}$ et les matrices A et B par deux endomorphismes continus sur $\mathcal{H}$ (pour utiliser les normes subordonnées) et l'application f serait également différentiable. Des extensions analogues sont valables pour les deux questions suivantes.

2. On note f l'application $X \mapsto {}^tXMX$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Pour toutes les matrices X, H de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{array}{rcl} f(X+H) & = & ({}^t(X+H)M(X+H)) = ({}^tX + {}^tH)M(X+H) = ({}^tXM + {}^tHM)(X+H) \\ & = & \underbrace{{}^tXMX}_{=f(X)} + \underbrace{{}^tXMH + {}^tHMX}_{=df_X(H)} + \underbrace{{}^tHMH}_{=o(H)} \end{array}$$

Il est évident que l'application $H \mapsto {}^tXMH + {}^tHMX$ est $\mathbb{R}$-linéaire et elle est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, soit en utilisant le fait que toute application linéaire en dimension finie est continue, soit en choisissant une norme $\|.\|$ sous-multiplicative sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. $\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$, ce qui est le cas de toutes les normes subordonnées relativement aux normes de $\mathbb{R}^n$) et invariante par transposition (i.e. $\|{}^tA\| = \|A\|$, ce qui est le cas pour la norme euclidienne sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$) et en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\left\|{}^tXMH + {}^tHMX\right\| \leqslant \left\|{}^tXMH\right\| + \left\|{}^tHMX\right\| \leqslant \left\|{}^tX\right\| \|M\| \|H\| + \left\|{}^tH\right\| \|M\| \|X\| = 2 \|X\| \|M\| \|H\|$$

Il reste à montrer que l'expression $H \mapsto {}^tHMH$ est négligeable devant H (c'est-à-dire devant la norme $\|H\|$ de H)

$$\left\| {}^tHMH\right\| \leqslant \left\|{}^tH\right\| \|M\| \|H\| = \|M\| \|H\|^2 = o(\|H\|)$$

Par conséquent, pour toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, l'application f est différentiable en M et l'on a

$$df_M : \begin{array}{rcl} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}_c(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})) \\ M & \mapsto & (H \mapsto {}^tXMH + {}^tHMX) \end{array}$$

3. On note f l'application $X \mapsto X^3$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Pour toutes les matrices X, H de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{array}{rcl} f(X+H) & = & (X+H)^3 = (X+H)(X+H)^2 = (X+H)(X^2+HX+XH+H^2) \\ & = & X^3 + XHX + X^2H + XH^2 + HX^2 + H^2X + HXH + H^3 \\ & = & \underbrace{X^3}_{=f(X)} + \underbrace{XHX + X^2H + HX^2}_{=df_X(H)} + \underbrace{H^2X + HXH + XH^2 + H^3}_{=o(H)} \end{array}$$

Il est évident que l'application $H \mapsto XHX + X^2H + HX^2$ est $\mathbb{R}$-linéaire et elle est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, soit en utilisant le fait que toute application linéaire en dimension finie est continue, soit en choisissant une norme $\|.\|$ sous-multiplicative sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. $\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$, ce qui est le cas de toutes les normes subordonnées relativement aux normes de $\mathbb{R}^n$) et en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\left\|XHX + X^2H + HX^2\right\| \leqslant \|XHX\| + \left\|X^2H\right\| + \left\|HX^2\right\| \leqslant \|X\| \|H\| \|X\| + \|X\| \|X\| \|H\| + \|H\| \|X\| \|X\| = 3 \|X\|^2 \|H\|$$

Il reste à montrer que l'expression $H \mapsto H^2X + HXH + XH^2 + H^3$ est négligeable devant H (c'est-à-dire devant la norme $\|H\|$ de H). Par les mêmes types de majoration que précédemment, on a

$$\left\|H^2X + HXH + XH^2 + H^3\right\| \leqslant (2\|X\| + \|H\|)\|H\|^2 = o(H)$$

Par conséquent, pour toute matrice X de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, l'application f est différentiable en X et l'on a

$$df_X : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}_c(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})) \\ M & \mapsto & \left(H \mapsto XHX + X^2H + HX^2\right) \end{array}$$

Correction de l'exercice 1.2 : On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme infinie ($\|(x_1,..,x_n)\| = \sup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$) et $|||A|||$ désigne la norme subordonnée de l'endomorphisme A de $\mathbb{R}^n$. En particulier, lorsque A est égal à $d\phi_x$ qui, par définition, est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ (espace de départ de ϕ) dans $\mathbb{R}^n$ (espace d'arrivée de $\mathbb{R}^n$).

1. Soit ρ un réel positif, la boule fermée $\overline{B(0,\rho)}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ (par caractérisation des compacts en dimension finie). En outre, l'application ϕ étant C^1 sur $\mathbb{R}^n$, on en déduit que l'application $x \mapsto d\phi_x$, qui, rappelons-le, va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, est continue sur le compact $\overline{B(0,\rho)}$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $d\phi_x$ est une application linéaire continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on désigne par $|||d\phi_x|||$ la norme subordonnée (*à une norme fixée de* $\mathbb{R}^n$) de $d\phi_x$ et l'application $x \mapsto |||d\phi_x|||$ est une application continue de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui implique qu'elle est bornée sur $\overline{B(0,\rho)}$ et qu'elle y atteint ses bornes. Par conséquent, il existe $x_\rho \in \overline{B(0,\rho)}$ tel que

$$\forall x \in \overline{B(0,\rho)}, \quad |||d\phi_x||| \leqslant \underbrace{\left|\left|\left|d\phi_{x_\rho}\right|\right|\right|}_{=C_\rho} < 1$$

Dès lors, on est tenté d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à ϕ mais cette inégalité n'est pas au programme des classes de MP/MP*. Cela ne fait rien, nous allons la redémontrer. Pour cela, on commence par considérer les fonctions composantes de ϕ, c'est-à-dire les n fonctions $(\phi_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(x) = (\phi_1(x), ..., \phi_n(x))$$

Soient x et y deux éléments de $\overline{B(0,\rho)}$, pour chaque fonction ϕ_i, on considère la fonction g_i définie sur le segment $[0,1]$ par

$$\forall t \in [0,1], \quad g_i(t) = \phi_i(tx + (1-t)y)$$

(on regarde la fonction ϕ_i le long du segment reliant x à y, ce segment étant en totalité inclu dans la boule fermée $\overline{B(0,\rho)}$). Calculons sa différentielle

$$\begin{array}{rcl} g_i(t+h) & = & \phi_i((t+h)x + (1-(t+h))y) = \phi_i(tx + (1-t)y + h(x-y)) \\ & = & \phi_i(tx+(1-t)y) + (d\phi_i)_{tx+(1-ty)}.(h(x-y)) + o(h) \\ & = & g_i(t) + h(d\phi_i)_{tx+(1-ty)}.(x-y) + o(h) \end{array}$$

par linéarité de $d\phi_i$ (qui est une application linéaire !!) donc $g'(t) = (d\phi_i)_{tx+(1-ty)}.(x-y)$ et en utilisant les normes subordonnées, on obtient

$$\forall t \in [0,1], \quad |g_i'(t)| = \left|(d\phi_i)_{tx+(1-ty)}.(x-y)\right| \leqslant \left|\left|\left|(d\phi_i)_{tx+(1-ty)}\right|\right|\right| \|x-y\| \leqslant C_\rho \|x-y\|$$

puisque x, y et $tx + (1-t)y$ appartiennent à $\overline{B(0,\rho)}$. On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction g_i entre 0 et 1, ce qui nous donne

$$\begin{array}{c} |g(1) - g(0)| \leqslant C_\rho \|x-y\| \, |1-0| \Leftrightarrow |\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leqslant C_\rho \|x-y\| \\ \Rightarrow \forall x, y \in \overline{B(0,\rho)}, \quad \|\phi(x) - \phi(y)\| = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leqslant C_\rho \|x-y\| \end{array}$$

Après cette petite mise en bouche, le résultat demandé tombe comme un fruit mûr. En effet, puisque $f = I + \phi$, on a, pour tout vecteur z de $\mathbb{R}^n$, l'égalité : $f(z) = z + \phi(z) \Leftrightarrow x = f(x) - \phi(x)$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{array}{rcl} \forall x, y & \in & \overline{B(0,\rho)}, \\ \|x-y\| & = & \|f(x) - \phi(x) - (f(y) - \phi(y))\| = \|f(x) - f(y) - (\phi(x) - \phi(y)\| \\ & \leqslant & \|f(x) - f(y)\| + \|\phi(x) - \phi(y)\| \leqslant \|f(x) - f(y)\| + C_\rho \|x-y\| \\ & \Rightarrow & \|f(x) - f(y)\| \geqslant (1 - C_\rho)\|x-y\| \end{array}$$

2. $\underline{f \text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme local}}$: montrons que sa différentielle est inversible en tout point x de $\mathbb{R}^n$. Puisque $f = \mathrm{Id} + \phi$ et que la différentielle d'une application linéaire est elle-même, ce qui est le cas de Id, on en déduit que $df_x = \mathrm{Id} + d\phi_x$. Soit h un vecteur de $\mathbb{R}^n$ appartenant au noyau de df_x alors

$$df_x.h = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Id} + d\phi_x).h = 0 \Leftrightarrow h + d\phi_x.h = 0 \Leftrightarrow -h = d\phi_x.h \Rightarrow \|h\| = \|d\phi_x.h\| \leqslant |||d\phi_n||| \, \|h\|$$

Si h est non nul, $\|h\|$ est également non nul, ce qui permet de diviser par $\|h\|$ dans l'inégalité précédente et l'on obtient que $1 \leqslant |||d\phi_x|||$, ce qui est absurde puisque $|||d\phi_x||| < 1$ donc $h = 0$ et l'application linéaire df_x est injective. Or c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ donc elle est bijective, c'est-à-dire que pour tout point x de $\mathbb{R}^n$, df_x est un isomorphisme.
Par conséquent, f est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et sa différentielle est inversible en tout point x de $\mathbb{R}^n$ donc, pour chaque point x de $\mathbb{R}^n$, il existe un voisinage ouvert V_x tel que f réalise un C^1-difféomorphisme de V_x sur $f(V_x)$ et $f(V_x)$ est un voisinage ouvert de $f(x)$.
$\underline{f(\mathbb{R}^n) \text{ est un ouvert}}$: Il est immédiat que $f(\mathbb{R}^n) = f\left(\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} V_x\right) = \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(V_x)$ est une réunion d'ouverts donc c'est un ouvert.
$\underline{f(\mathbb{R}^n) \text{ est un fermé}}$: On utilise pour cela la caractérisation séquentielle des fermés. Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $f(\mathbb{R}^n)$ convergeant dans $\mathbb{R}^n$ vers y. Il faut montrer que $y \in f(\mathbb{R}^n)$. Par définition, pour chaque point y_k, il existe un point x_k de $\mathbb{R}^n$ tel que $y_k = f(x_k)$. La suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant convergente dans $\mathbb{R}^n$, donc elle est bornée, ce qui implique qu'elle est incluse dans une certaine boule $\overline{B}(0,\rho)$, et elle est de Cauchy, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geqslant N, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \|y_{k+p} - y_k\| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \|f(x_{k+p}) - f(x_k)\| \leqslant \varepsilon$$

Si l'on utilisant l'inégalité obtenue à la question 1 et en tenant compte du fait que $C_\rho < 1$, on en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geqslant N, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \|x_{k+p} - x_k\| \leqslant \frac{\|f(x_{k+p}) - f(x_k)\|}{1 - C_\rho} \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - C_\rho}$$

La constante C_ρ étant indépendante de k, p et ε, on en déduit que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ (remplacer ε par $\varepsilon(1 - C_\rho)$). L'espace $\mathbb{R}^n$ étant complet, on en déduit que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^n$ vers un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^n$, il est immédiat que $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = f(\lim\limits_{k\to+\infty} x_k) = f(x)$, ce qui s'écrit encore $y = f(x)$ donc $y \in f(\mathbb{R}^n)$, cqfd.

3. Nous savons que f est un C^1-difféomorphisme au voisinage de chaque point x de $\mathbb{R}^n$. Pour utiliser le théorème d'inversion globale, il faut montrer que f est injective sur $\mathbb{R}^n$. Soient x et y deux points de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = f(y)$, ce qui est évident en utilisant l'inégalité de la question 1

$$\underbrace{\|f(x) - f(y)\|}_{=0} \geqslant (1 - C_\rho) \|x - y\| \Leftrightarrow 0 \geqslant \|x - y\| \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème d'inversion globale sont réalisées, ce qui implique que f réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $f(\mathbb{R}^n)$. Hors à la question 2, on a montré que $f(\mathbb{R}^n)$ est à la fois ouvert et fermé et le cours sur la connexité montre que les ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$ sont l'ensemble vide $\emptyset$ ou $\mathbb{R}^n$. Il est évident que $f(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$ donc $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Correction de l'exercice 1.3 :

1. L'application $x \mapsto \|x\|^2 = <x, x>$ est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ (c'est un polynôme en les coordonnées), la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $\|x\|^2 > 0$ donc l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\|x\|^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. La fonction f étant C^1 sur $\mathbb{R}$ ainsi que la fonction $x \mapsto x$, il est immédiat que la fonction $x \mapsto f(\|x\|)x = F(x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
La fonction f admet le $\mathrm{DL}_1(0)$ suivant $f(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + t + o(t)$ donc

$$F(0 + h) = F(h) = [1 + \|h\| + o(\|h\|)]\, h = h + h\,\|h\| + o(h\,\|h\|) = h + o(\|h\|)$$

Par conséquent, la fonction F est différentiable en 0 et sa différentielle est donnée par $F'(0) : h \mapsto h$ ou encore $F'(0) = \mathrm{Id}_E$.
Pour justifier que F est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ tout entier, il reste à montrer que $\lim\limits_{x\to 0} F'(x) = F(0)$. Pour cela, nous allons expliciter la différentielle en revenant à la définition initiale sous la forme d'un $\mathrm{DL}_1(0)$, en commençant par donner le $\mathrm{DL}_1(0)$ de

$y \mapsto \|y\|$ au voisinage de x puis en utilisant le $\mathrm{DL}_1(\|x\|)$ de f (Taylor à l'ordre 1). Lorsque x est non nul, on a :

$$\begin{aligned}
\|x+h\| &= \sqrt{\|x+h\|^2} = \sqrt{\|x\|^2 + 2 < x,h > + \|h\|^2} = \sqrt{\|x\|^2}\sqrt{1 + 2\frac{< x,h >}{\|x\|^2} + o(\|h\|)} \\
&= \|x\|\left(1 + \frac{1}{2} \times 2\frac{< x,h >}{\|x\|^2} + o(\|h\|)\right) = \|x\| + \frac{< x,h >}{\|x\|} + o(\|h\|) \\
f(\|x+h\|) &= f\left(\|x\| + \frac{< x,h >}{\|x\|} + o(\|h\|)\right) = f(\|x\|) + f'(\|x\|)\frac{< x,h >}{\|x\|} + o(\|h\|) \\
F(x+h) &= f(\|x+h\|)(x+h) = \left(f(\|x\|) + f'(\|x\|)\frac{< x,h >}{\|x\|} + o(\|h\|)\right)(x+h) \\
&= \underbrace{f(\|x\|)x}_{=F(x)} + \underbrace{f'(x) < x,h > x + f(\|x\|)h}_{=F'(x).h} + \underbrace{f(\|x\|)\frac{< x,h >}{\|x\|}h + xo(\|h\|) + ho(\|h\|)}_{=o(\|h\|)}
\end{aligned}$$

En effet, $xo(\|h\|) + ho(\|h\|)$ sont des $o(\|h\|)$ et la majoration

$$\|< x,h > h\| = |< x,h >| \times \|h\| \leqslant \|x\| \times \|h\| \times \|h\| = \|x\|\,\|h\|^2 = o(\|h\|)$$

montre que l'expression $f(\|x\|)\dfrac{< x,h >}{\|x\|}h$ est également un $o(\|h\|)$ (le vecteur x étant fixé).
Par conséquent, la différentielle de F en x est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad F'(x) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ h & \mapsto & f'(x) < x,h > x + f(\|x\|)h \end{array}$$

Remarquons que l'écriture $\lim\limits_{x\to 0} F'(x) = F(0)$ signifie que l'endomorphisme $F'(x)$ tend vers l'endomorphisme $F'(0)$ lorsque $x \to 0$, ou encore que $\lim\limits_{x\to 0} |||F'(x) - F'(0)||| = 0$. Plutôt que de travailler sur les normes subordonnées, nous allons commencer par estimer la différence $\|F'(x).h - F'(0).h\|$ puis nous en déduirons une majoration de $|||F'(x) - F'(0)|||$

$$\begin{aligned}
\|F'(x).h - F'(0).h\| &= \|f'(\|x\|) < x,h > x + f(\|x\|)h - h\| \\
&\leqslant |f'(\|x\|) < x,h >| \times \|x\| + \|\{f(\|x\|) - 1\}\, h\| \\
&\leqslant |f'(\|x\|)| \times \|x\| \times \|h\| \times \|x\| + |f(\|x\|) - 1| \times \|h\|
\end{aligned}$$

et en passant au sup lorsque h décrit la boule unité, x étant fixé, on obtient

$$|||F'(x) - F'(0)||| \leqslant |f'(\|x\|)| \times \|x\|^2 + |f(\|x\|) - 1|$$

Puisque f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $f(0) = f'(0) = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} |f'(\|x\|)| \times \|x\|^2 + |f(\|x\|) - 1| = 0$ et l'encadrement précédent implique que $\lim\limits_{x\to 0} |||F'(x) - F'(0)||| = 0$ donc F est bien C^1 en 0, ce qui implique que F est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.

2. On va utiliser la structure euclidienne (je laisse le soin au lecteur de se convaincre que l'obtention de la minoration souhaitée à l'aide d'une norme quelconque s'avère impossible)

$$\begin{aligned}
\|F'(x).h\|^2 &= \|f'(\|x\|) < x,h > x + f(\|x\|)h\|^2 \\
&= |f'(\|x\|)|^2 < x,h >^2 \|x\|^2 + 2f'(\|x\|) < x,h >< x,h > + [f(\|x\|)]^2 \|h\|^2 \\
&= |f'(\|x\|)|^2 < x,h >^2 \|x\|^2 + 2f'(\|x\|) < x,h >^2 + [f(\|x\|)]^2 \|h\|^2
\end{aligned}$$

D'après l'énoncé, la fonction f est croissante donc sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}$ tout entier. En particulier, l'expression $f'(\|x\|)$ est positive pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout comme $< x,h >^2$, donc

$$\|F'(x).h\|^2 \geqslant [f(\|x\|)]^2 \|h\|^2 \Leftrightarrow \|F'(x).h\| \geqslant |f(\|x\|)|\, \|h\|$$

3. On doit vérifier pour commencer que les conditions requises par le théorème d'inversion globale sont satisfaitent.
<u>L'application F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$</u> (d'après la question 1).
<u>Injectivité de F</u> : Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$F(x) = F(y) \Leftrightarrow f(\|x\|)x = f(\|y\|)y \qquad (1)$$

La fonction f étant croissante, on en déduit que $\forall t \geqslant 0, \quad f(t) \geqslant f(0) = 1 > 0$, donc pour tout vecteur $z \in \mathbb{R}^n$, on a $f(\|z\|) \geqslant 1 > 0$. En passant à la norme dans l'égalité (1), on obtient

$$f(\|x\|)\,\|x\| = f(\|y\|)\,\|y\| \qquad (2)$$

La fonction $t \mapsto g(t) = tf(t)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle y est C^1 et sa dérivée est donnée par $g'(t) = \underbrace{f(t)}_{\geqslant 1} + \underbrace{t}_{\geqslant 0}\underbrace{f'(t)}_{\geqslant 0}$ qui est strictement positive (la fonction f étant croissante, sa dérivée est positive). Par conséquent, la fonction $t \mapsto tf(t)$ est injective donc l'égalité (2) est équivalente à l'égalité $\|x\| = \|y\|$. En particulier, $f(\|x\|) = f(\|y\|)$ et puisque f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, on peut diviser $f(\|x\|) = f(\|y\|)$ dans l'égalité (1), ce qui entraine que $x = y$ et démontre l'injectivité de l'application F sur $\mathbb{R}^n$.
<u>Inversibilité de la différentielle en tout point de $\mathbb{R}^n$</u> .
Pour montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, la différentielle $F'(x)$, qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, est inversible, il suffit de montrer qu'elle est injective. Soit h un vecteur de $\mathbb{R}^n$ appartenant au noyau de $F'(x)$, c'est-à-dire $F'(x).h = 0$. La majoration obtenue à la question 2 montre que

$$0 = \|0\| = \|F'(x).h\| \geqslant |f(\|x\|)|\,\|h\| \Rightarrow 0 \geqslant |f(\|x\|)|\,\|h\|$$

La fonction f étant strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, on est en droit de diviser par $f(\|x\|)$, ce qui implique que $\|h\| \leqslant 0$ donc $\|h\| = 0$ (une norme est toujours positive), ce qui montre que $h = 0$.

Les conditions du théorème d'inversion globale sont réalisées donc F réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $F(\mathbb{R}^n)$ et $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert.
Il reste donc à montrer que $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Pour justifier cette égalité ensembliste, nous allons montrer que $F(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$. En effet, les seuls ensembles qui sont à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$ sont l'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$, or $F(\mathbb{R}^n)$ n'étant pas vide et étant ouvert (théorème d'inversion global) et fermé, cela implique que $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

<u>Démonstration du fait que $F(\mathbb{R}^n)$ est fermé</u> : Nous allons utiliser la caractérisation séquentielle (*par les suites*) des fermés. Soit $(y_k)_k$ une suite de $F(\mathbb{R}^n)$ convergeant vers un vecteur y de $\mathbb{R}^n$. Par construction, pour tout entier k, il existe un vecteur x_k de $\mathbb{R}^n$ tel que $y_k = F(x_k) = f(\|x_k\|)\,x_k$. La suite $(y_k)_k$ est convergente dans $\mathbb{R}^n$ donc elle est bornée par une constante M, ce qui nous permet d'écrire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|y_k\| \leqslant M \Leftrightarrow \|f(\|x_k\|)\,x_k\| \leqslant M \Leftrightarrow f(\|x_k\|) \times \|x_k\| \leqslant M$$

La fonction f est supérieure à 1 sur $\mathbb{R}_+$ (cf. la justification de l'injectivité de F), on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|x_k\| \leqslant f(\|x_k\|) \times \|x_k\| \leqslant M$$

donc la suite $(x_k)_k$ est bornée. On peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(k)})_k$ vers un vecteur x. La continuité de la fonction F implique que la suite $F(x_{\varphi(k)}) = y_{\varphi(k)}$ converge vers $F(x)$. Or la suite $(y_{\varphi(k)})_k$ est une suite extraite de la suite convergente $(y_k)_k$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} y_{\varphi(k)} = y$, ce qui entraine que $y = F(x)$ donc $y \in F(\mathbb{R}^n)$ et l'ensemble $F(\mathbb{R}^n)$ est bien fermé.

Correction de l'exercice 1.4 : Nous allons bien entendu utiliser le théorème d'inversion globale.
<u>L'application F est C^1 sur $\mathbb{R}^3$</u> : cela résulte immédiatement du fait que l'application f étant C^1 sur $\mathbb{R}$
<u>L'application F est injective sur $\mathbb{R}^3$</u> : La dérivée de f est bornée par $k < 1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. On est donc en droit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \quad |f(u) - f(v)| \leqslant k\,|u - v|$$

Considérons deux vecteurs (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) tels que $F(x_1, y_1, z_1) = F(x_2, y_2, z_2)$, ce qui implique que

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + f(y_1) = x_2 + f(y_2) \\ y_1 + f(z_1) = y_2 + f(z_2) \\ z_1 + f(x_1) = z_2 + f(x_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 = f(y_2) - f(y_1) \\ y_1 - y_2 = f(z_2) - f(z_1) \\ z_1 - z_2 = f(x_2) - f(x_1) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |x_1 - x_2| = |f(y_2) - f(y_1)| \leqslant k\,|y_2 - y_1| \\ |y_1 - y_2| = |f(z_2) - f(z_1)| \leqslant k\,|z_2 - z_1| \\ |z_1 - z_2| = |f(x_2) - f(x_1)| \leqslant |x_2 - x_1| \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad (1) : |x_1 - x_2| \leqslant k\,|y_2 - y_1| \leqslant k^2\,|z_2 - z_1| \leqslant k^3\,|x_2 - x_1|$$

En particulier, on a $|x_1 - x_2| \leqslant k^3\,|x_1 - x_2|$. Si $x_1 \neq x_2$ alors on peut diviser par $|x_1 - x_2|$, ce qui entraine que $1 \leqslant k^3 \Leftrightarrow 1 \leqslant k$, ce qui est absurde puisque $k \in]0, 1[$ donc $x_1 = x_2$. L'encadrement (1) induit immédiatement que $y_2 = y_1$ et $z_2 = z_1$ donc $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$ et l'injectivité de F est justifée.
<u>La différentielle de F est inversible en tout point de $\mathbb{R}^3$</u> : On calcule le déterminant jacobien de F

$$J_F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(x + f(y)) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x + f(y)) & \dfrac{\partial}{\partial z}(x + f(y)) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(y + f(z)) & \dfrac{\partial}{\partial y}(y + f(z)) & \dfrac{\partial}{\partial z}(y + f(z)) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(z + f(x)) & \dfrac{\partial}{\partial y}(z + f(x)) & \dfrac{\partial}{\partial z}(z + f(x)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f'(y) & 0 \\ 0 & 1 & f'(z) \\ f'(x) & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + f'(x)f'(y)f'(z)$$

Puisque $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on dispose de l'inégalité $|f'(x)f'(y)f'(z)| \leqslant k^3 < 1$, on en déduit immédiatement que $1 + f'(x)f'(y)f'(z) > 0$ donc $J_F(x,y,z) \neq 0$ sur $\mathbb{R}^3$.

Par conséquent, l'application F est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $F(\mathbb{R}^3)$ (et $F(\mathbb{R}^3)$ est un ouvert) Pour achever l'exercice, il suffit de montrer que $F(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$.

Justification que $F(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$:
Première méthode (par connexité) : Puisque $F(\mathbb{R}^3)$ est ouvert (théorème d'inversion globale), il suffit de montrer que $F(\mathbb{R}^3)$ est fermé, car les seuls ensembles qui sont à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^3$ sont l'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}^3$, or $F(\mathbb{R}^3)$ n'étant pas vide, il est obligatoire que $F(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$.
Soit $(x_n, y_n, z_n)_n$ une suite de $F(\mathbb{R}^3)$ convergeant vers un vecteur (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$. Par construction, pour tout entier n, il existe un triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (x_n, y_n, z_n) = F(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_n = \alpha_n + f(\beta_n) \\ y_n = \beta_n + f(\gamma_n) \\ z_n = \gamma_n + f(\alpha_n) \end{array} \right.$$

Montrons que la suite $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)_n$ est bornée. Pour commencer, les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elles sont toutes convergentes) et il existe un réel positif M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} |x_n| \leqslant M \\ |y_n| \leqslant M \\ |z_n| \leqslant M \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_n + f(\beta_n)| \leqslant M \\ |\beta_n + f(\gamma_n)| \leqslant M \\ |\gamma_n + f(\alpha_n)| \leqslant M \end{array} \right.$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f (qui vérifie $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leqslant k < 1$) nous donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t) - f(0)| \leqslant k\,|t - 0| = k\,|t| \Rightarrow |f(t)| = |[f(t) - f(0)] + f(0)| \leqslant |f(0)| + k\,|t|$$

Cette inégalité combinée au système (S_n) implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_n| = |[\alpha_n + f(\beta_n)] - f(\beta_n)| \leqslant |\alpha_n + f(\beta_n)| + |f(\beta_n)| \leqslant M + |f(0)| + k\,|\beta_n| \\ |\beta_n| = |[\beta_n + f(\gamma_n)] - f(\gamma_n)| \leqslant |\beta_n + f(\gamma_n)| + |f(\gamma_n)| \leqslant M + |f(0)| + k\,|\gamma_n| \\ |\gamma_n| = |[\gamma_n + f(\alpha_n)] - f(\alpha_n)| \leqslant |\gamma_n + f(\alpha_n)| + |f(\alpha_n)| \leqslant M + |f(0)| + k\,|\alpha_n| \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_n| \leqslant M + |f(0)| + k\,|\beta_n| \\ |\beta_n| \leqslant M + |f(0)| + k\,|\gamma_n| \\ |\gamma_n| \leqslant M + |f(0)| + k\,|\alpha_n| \end{array} \right. \Rightarrow |\alpha_n| + |\beta_n| + |\gamma_n| \leqslant 3(M + |f(0)|) + k(|\alpha_n| + |\beta_n| + |\gamma_n|)$$

$$\Rightarrow (1-k)\,(|\alpha_n| + |\beta_n| + |\gamma_n|) \leqslant 3(M + |f(0)|) \Rightarrow |\alpha_n| + |\beta_n| + |\gamma_n| \leqslant \frac{3(M + |f(0)|)}{1-k}$$

Ainsi, la somme $|\alpha_n| + |\beta_n| + |\gamma_n|$ est bornée par $\dfrac{3(M + |f(0)|)}{1-k}$, ce que l'on peut interpréter comme étant le fait que la suite $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)_n$ est bornée pour la norme $N_1(a,b,c) = |a| + |b| + |c|$ sur $\mathbb{R}^3$. On peut donc extraire une sous-suite $(\alpha_{\varphi(n)}, \beta_{\varphi(n)}, \gamma_{\varphi(n)})_n$ convergente vers un vecteur (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ (Bolzano-Weierstrass dans un espace de dimension finie). La fonction F étant continue sur $\mathbb{R}^3$, on en déduit que la suite $(F(\alpha_{\varphi(n)}, \beta_{\varphi(n)}, \gamma_{\varphi(n)}))_n$ converge vers $F(\alpha, \beta, \gamma)$. Or, par construction, pour tout entier naturel n, on a $F(\alpha_{\varphi(n)}, \beta_{\varphi(n)}, \gamma_{\varphi(n)}) = (x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}, z_{\varphi(n)})$ qui est une suite extraite de la suite (x_n, y_n, z_n) qui converge vers (x,y,z) donc $(x,y,z) = F(\alpha, \beta, \gamma)$, ce qui démontre que $(x,y,z) \in F(\mathbb{R}^3)$ et achève la preuve.

Deuxième méthode (explicite itérative) : La surjectivité de F ($F(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$) est équivalente à montrer que pour tout vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, il existe un vecteur (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$(x,y,z) = F(\alpha, \beta, \gamma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + f(\beta) \\ y = \beta + f(\gamma) \\ z = \gamma + f(\alpha) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = x - f(\beta) \\ \beta = y - f(\gamma) \\ \gamma = z - f(\alpha) \end{array} \right.$$

on a ramené la surjectivité à l'existence d'un point fixe (α, β, γ) pour l'application

$$T : (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (x - f(\beta), y - f(\gamma), z - f(\alpha))$$

(qui dépend du point (x,y,z) quand même !!). On introduit classiquement la suite $X_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = T(X_n) \quad \text{et} \quad X_0 = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n+1} = x - f(\beta_n) \\ \beta_{n+1} = y - f(\gamma_n) \\ \gamma_{n+1} = z - f(\alpha_n) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$$

Nous allons montrer la convergence de cette suite de vecteurs. On munit $\mathbb{R}^3$ d'une norme quelconque mais, les calculs menés dans la première méthode nous incite à choisir la norme N_1 définie par $N_1(a,b,c) = |a| + |b| + |c|$. L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f nous montre que

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \quad |f(u) - f(v)| \leqslant k\,|u - v|$$

ce qui entraine que

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| = |x - f(\beta_n) - (x - f(\beta_{n-1})| = |f(\beta_{n-1}) - f(\beta_n)| \leqslant k\,|\beta_n - \beta_{n-1}| \\ |\beta_{n+1} - \beta_n| = |y - f(\gamma_n) - (y - f(\gamma_{n-1})| = |f(\gamma_{n-1}) - f(\gamma_n)| \leqslant k\,|\gamma_n - \gamma_{n-1}| \\ |\gamma_{n+1} - \gamma_n| = |z - f(\alpha_n) - (z - f(\alpha_{n-1})| = |f(\alpha_{n-1}) - f(\alpha_n)| \leqslant k\,|\alpha_n - \alpha_{n-1}| \end{array} \right.$$

En additionnant ces trois inégalités, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad N_1(X_{n+1} - X_n) \leqslant k N_1(X_n - X_{n-1})$$

Une récurrence immédiate, que je laisse au lecteur, montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad N_1(X_{n+1} - X_n) \leqslant k^n N_1(X_1 - X_0)$$

Par conséquent, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} N_1(X_{n+1} - X_n)$ est convergente (puisque son terme général est majorée par une suite géométrique de raison $k \in [0,1[$) donc la série de vecteurs $X_{n+1} - X_n$ est absolument convergente (pour la norme N_1) donc elle est convergente, ce qui implique la convergence de la suite $(X_n)_n$ (revoir le cours sur les séries à valeurs dans un Banach). Si l'on note X la limite de la suite $(X_n)_n$. En passant à la limite dans l'égalité $X_{n+1} = T(X_n)$ (la continuité de l'application T étant évidente si l'on revoit sa définition ci-dessus), on en déduit que $X = T(X)$. Si l'on note $X = (\alpha, \beta, \gamma)$, l'égalité $X = T(X)$ s'écrit encore

$$X = T(X) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = x - f(\beta) \\ \beta = y - f(\gamma) \\ \gamma = z - f(\alpha) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + f(\beta) \\ y = \beta + f(\gamma) \\ z = \gamma + f(\alpha) \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y,z) = F(\alpha, \beta, \gamma)$$

et nous venons de montrer que le vecteur (x,y,z) admet bien un antécédent par F, ce qui achève la preuve.

Remarque : le lecteur peu averti des séries à valeurs dans un Banach peut montrer que la suite (X_n) est de Cauchy en justifiant que $N_1(X_{n+p} - X_n) \leqslant \dfrac{k^n}{1-k} N_1(X_1 - X_0)$, ce qui est très classique. En particulier, si l'on fait tendre p vers $+\infty$, on en déduit que $N_1(X - X_n) \leqslant \dfrac{k^n}{1-k} N_1(X_1 - X_0)$ (cette inégalité s'obtient également par une majoration du reste partielle de la série $\sum\limits_n (X_{n+1} - X_n)$). Cette inégalité permet d'utiliser une machine pour connaitre, à ε près, l'ordre de grandeur du vecteur X en l'approximant par X_n, où n est un entier vérifiant $\dfrac{k^n}{1-k} N_1(X_1 - X_0) \leqslant \varepsilon$. Le calcul de X_n s'effectuant par un petit programme à l'aide d'un calculateur, ce qui permet d'expliciter, à ε près, un antécédent d'un vecteur (x,y,z) par F. Cette méthode est utile par exemple pour expliciter des inverses de matrices lorsque la diagonale est strictement dominante (i.e. chaque élément diagonal est, en valeur absolue, strictement supérieur à la somme des valeurs absolues des autres éléments de sa ligne, en particulier la matrice est nécessairement inversible et aucun des éléments diagonaux n'est nul). Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, on écrit $A = D + L$, où D est la diagonale, alors l'égalité $Y = AX$ est équivalente à l'égalité $X = D^{-1}Y - D^{-1}LX$. On vérifie alors que l'application linéaire $D^{-1}L$ (qui est sa propre différentielle) admet une norme N_1 strictement moindre que 1 et le processus exposé dans la seconde méthode permet d'obtenir le vecteur X à ε près.