1 Exercices

Exercice 1.1 Montrer que la famille $(f_1, .., f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement il existe n réels distincts $x_1, .., x_n$ tels que les vecteurs $\left\{(f_i(x_j))_{j\in[\![1,n]\!]}\right\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.2

1. Montrer que le polynôme $P(X) = 1 + X + \cdots + X^{p-1}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ lorsque p est un nombre premier.
   (On étudiera ce polynôme modulo p)
   En déduire qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. Soient n et d deux entiers naturels tels que $1 \leqslant d \leqslant n$.
   On considère le polynôme $\Phi_d(X) = \prod_{\substack{(k,d)=1 \\ 1\leqslant k\leqslant n}} \left(X - \exp\left(\frac{2k\pi i}{d}\right)\right)$.
   (a) A quelles conditions sur d et d' les polynômes Φ_d et $\Phi_{d'}$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$?
   (b) Calculer le produit $\prod_{d|n} \Phi_d(X)$. En déduire la valeur de la somme $\sum_{d|n} \varphi(d)$.
   (c) Montrer que, pour tout entier d, le polynôme Φ_d est dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 1.3 Soit $\mathbb{K}$ un corps. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 1.4 On considère l'opérateur $P \in \mathbb{K}[X] \overset{\Delta}{\mapsto} P(X+1) - P(X)$.

1. Soit k un entier naturel. Expliciter $\ker(\Delta^k)$ et $\mathrm{Im}(\Delta^k)$.
2. Justifier que $\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P = \sum_{k=0}^{+\infty} (\Delta^k P)(0) \left[\frac{X(X-1)...(X-k+1)}{k!}\right]$.
   On commencera par montrer que la formule ci-dessus a bien un sens.
3. Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré n.
   Montrer que P appartient à $\mathbb{Z}[X]$ si et seulement $P(0), P(1), .., P(n-1)$ sont des entiers relatifs.

Exercice 1.5 Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+2)$

Exercice 1.6 Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geqslant 0$.

1. On suppose que f n'a pas de racine réelle. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}[X]$ tels que $f = a^2 + b^2$.
2. On suppose que f est scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f = c^2$.
3. En conclure que f peut toujours s'écrire sous la forme $f = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{R}[X]$.

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)