1 Exercices

Exercice 1.1 Soit $E = C(\mathbb{R}_+^\times, \mathbb{R})$.

1. Vérifier rapidement que $T : f \mapsto \left[x \mapsto (Tf)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right]$ est un endomorphisme de E.
2. L'endomorphisme T est-il bijectif de E sur E ?
3. Soit f un vecteur propre de T.
   (a) Montrer qu'en fait f est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\times$.
   (b) Expliciter les valeurs propres et les vecteurs propres de T.
4. Montrer que l'on peut étendre l'opérateur T à $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et expliciter alors son spectre.

Exercice 1.2 Soit A un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $A^q - I_n = 0$ (avec $q \in \mathbb{N}^\times$). Montrer que :

$$\dim(\ker(A - I_n)) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} \mathrm{tr}(A^i).$$

Exercice 1.3 On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ et l'application u de E dans E définie par $u(P) = Q$ avec

$$Q(X) = (1 + X^2)P' - nXP(X).$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Noyau de u.
3. Valeurs propres et vecteurs propres de u. Même question lorsque $E = \mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 1.4 Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ et $p \in \mathbb{N}^\times$. On définit trois endomorphismes sur E par :

$$\Delta : (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} \qquad T_p : (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \left[\exp\left(\frac{2\pi in}{p}\right)u_n\right]_{n\in\mathbb{Z}} \qquad H_p : (u_n)_n \in E \mapsto \left[u_{n+1} + \exp\left(\frac{2\pi in}{p}\right)u_n\right].$$

1. Expliciter les valeurs propres et les vecteurs propres de Δ.
2. Expliciter les valeurs propres de T_p puis les vecteurs propres correspondants.
3. Soit S l'application définie par

$$S : (u_1, u_2, ..., u_p) \in \prod_{\lambda \in Sp(T_p)} \ker(T_p - \lambda\,\mathrm{Id}) \mapsto u_1 + u_2 + \cdots + u_p \in E$$

   (a) Montrer que l'application S est un isomorphisme et expliciter son inverse S^{-1}.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice $\mathcal{H}_p$ telle que

$$S^{-1}H_pS = \mathcal{H}_p\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_p\end{pmatrix}$$

   (c) Caractériser alors le spectre de H_p et expliciter le lorsque $p = 3$.

$\boxed{\text{Remarque culturelle}}$:

Le spectre de H_p est alors constitué des p valeurs propres distinctes de la matrice $\begin{pmatrix}1 & & (0) & & 1\\ 1 & \zeta & & & \\ & \ddots & \zeta^2 & & (0)\\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & 1 & \zeta^{p-1}\end{pmatrix}$ (en fait H_p est la somme de deux opérateurs qui commutent "presque" car $\Delta T_p = \zeta T_p \Delta$ donc, à la physicienne, lorsque $p \to +\infty$, Δ et

T_p commutent !!)
Je lui explique l'origine physique de cet opérateur : il s'agit de l'opérateur de Harper

$$H_\alpha : u \mapsto u(x+\alpha) + \exp(2\pi i x)u(x)$$

sur $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $\alpha = \dfrac{1}{p}$, mais aussi $\alpha = \dfrac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ en remplaçant ζ par ζ^q (lorsque l'on étudie l'opérateur $H_\alpha + H_\alpha^*$ et que l'on note I_α son spectre alors le graphe (α, I_α) définie une partie du plan qui est le célèbre papillon de Hofstadter

http://archive.numdam.org/ARCHIVE/MSMF/MSMF_1990_2_43_/MSMF_1990_2_43__1_0/MSMF_1990_2_43__1_

http://archive.numdam.org/ARCHIVE/MSMF/MSMF_1988_2_34_/MSMF_1988_2_34__1_0/MSMF_1988_2_34__1_

http://images.google.fr/imgres?imgurl=http://www.lps.u-psud.fr/Collectif/gr_05/images/Hofstadter.gif&imgrefurl=http://ww psud.fr/Collectif/gr_05/organiques/organiqtheo.htm&h=358&w=505&sz=24&tbnid=nUeKkqJldMkJ:&tbnh=90&tbnw=128&hl=

En écrivant les fonctions propres comme une somme continue de fonctions propres 1-périodiques, on se ramène à une version continue de l'opérateur H_p dont fondamentalement "la matrice" est $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & & 1 \\ 1 & \zeta^x & & & \\ & \ddots & \zeta^{2x} & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & 1 & \zeta^{(p-1)x} \end{pmatrix}$ avec $x \in [0,1]$.

Le spectre de $H_{q/p}$ est alors la réunion des spectres des $A(x)$ lorsque $x \in [0,1]$. Dans ce cas, chaque valeur propre λ devient une famille continue $\lambda(x)$ de valeurs propres qui décrivent un "intervalle" $I_{k,p}$ (si l'on considère $H_p + H_p^*$ pour simplifier) de longueur en $\dfrac{1}{p}$. On dispose ainsi que p intervalles disjoints contenu dans $[-2,2]$ de longueur en $\dfrac{1}{p}$. Lorsque $p \to +\infty$, cette union d'intervalles "tend" vers un Cantor (un Cantor p-adique).
Si α est un réel "fortement transcendant" (du genre un nombre de Liouville), on montre alors (Grigis, Sjöstrand, Helfer en 1988 pour la version finale) que le spectre de H_α est alors la limite des spectres de H_{q_n/p_n} avec $\dfrac{q_n}{p_n} \to \alpha$ rapidement, c'est-à-dire que le spectre de H_α est un Cantor.
Quand j'aurais le temps, j'essairai de faire un article compréhensible en Spé de ce joli résultat (preuve propre et simple lorsque α est rationnel et "ébauche" d'intuition pour le résultat).
C'est ce résultat qui a amené Yoccoz à se poser la question : Quand deux Cantors se rencontrent-ils ? En fait, que dire du spectre de $H_\alpha + H_\beta$ (formellement, c'est la somme de deux Cantors mais avec de nombreuses complications dûes à l'égalité $\lambda + \mu = 0$)

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)