1 Exercices

Exercice 1.1 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, on note $T(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad [T(f)](x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & \text{si } x \in]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. On dentifie les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynômiales associées sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que T est un endomorphisme continu sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Expliciter sa norme subordonnée lorsqu'on munit $\mathbb{R}_n[X]$ des normes suivantes

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right\|_\infty = \sup_{k\in[\![0,n]\!]} |a_k| \qquad \left\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \qquad \left\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2}$$

2. Montrer que T est un endomorphisme de $C([0,1],\mathbb{R})$.
3. Est-il continu pour les normes suivantes ?

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f| \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

Exercice 1.2 Soit φ une application continue bijective strictement croissante de $[0,1]$ sur $[0,1]$.
Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $T(f) : x \mapsto \int_0^1 \min(x,\varphi(t))f(t)dt$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Montrer que T est continu pour la norme uniforme et calculer $|||T|||$.

Exercice 1.3 Soit E l'ensemble des $(n+1)$-uplets de complexes distincts.
Pour tout $Z = (z_0, z_1, .., z_n)$ de E et tout P de $\mathbb{C}_n[X]$, on pose $N_Z(P) = \sum_{k=0}^{n} |P(z_k)|$.

1. Montrer que N_Z est une norme sur $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Soient des éléments Z et Z' de E; comparer N_Z et $N_{Z'}$;
3. Trouver effectivement $c > 0$ telle que $N_Z \leqslant cN_{Z'}$.
4. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on pose $\|P\| = \sum_{k=0}^{n} |P(k)|$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P)(X) = P(X+1)$. Calculer sa norme.

Exercice 1.4 Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, $T : E \to E$ définie par $T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme continu de E, déterminer sa norme.
2. Soit $f \in E$ telle que $f \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $x_0 > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, x_0[, \quad |f(x)| < |f(x_0)| = \|f\|_\infty$$

3. En déduire que les seuls vecteurs propres de f associés à la valeur propre 2 sont les fonctions constantes non nulles.

Exercice 1.5 Soit $E = \{f \in C^0(]0,1[,\mathbb{R}); \quad t \mapsto tf(t) \text{ est bornée }\}$. Sur E on définit la norme $N : N(f) = \sup_{t\in]0,1[} |tf(t)|$.

1. Montrer que (E,N) est un espace vectoriel.

2. Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & t \mapsto \dfrac{1}{6}(f(\dfrac{t}{2}) + f(\dfrac{t}{3})) \end{array}$ est continue.
3. Quelle est sa norme subordonnée ?

Exercice 1.6 Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes.

1. A quelle condition l'application $N_A : P = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k X^k \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k p_k|$ est-elle une norme sur $\mathbb{C}[X]$?
2. A quelle condition N_A et N_B sont-elles équivalentes ?
3. Existe-t-il une suite A telle que $P \mapsto P'$ soit continue ?

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)