1 Exercices

Exercice 1.1 On pose $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{3n}$.

1. Montrer que la suite (a_n) converge. On note λ sa limite.
2. Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.
3. Calculer λ.

Exercice 1.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$. On considère $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{k^\alpha}$.

1. Justifier l'existence de R_n.
2. Que peut-on dire de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} R_n$ lorsque $\alpha > 1$, lorsque $\alpha = 1$, lorsque $0 < \alpha < 1$?

Exercice 1.3 Convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(-1)^n\sqrt{n} + \ln n}$

Exercice 1.4 1. Soit $\alpha \in]0,1[$.

(a) Donner un équivalent simple u_n de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $n \to +\infty$.

(b) Montrer que la suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - u_n$ admet une limite finie C_α.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ et $\zeta_1(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

(a) Pour quelles valeurs de α, les expressions $\zeta(\alpha)$ et $\zeta_1(\alpha)$ existent-elles ?
(b) Calculer $\zeta(\alpha) + \zeta_1(\alpha)$. En déduire l'expression de $\zeta(\alpha)$ en fonction de $\zeta_1(\alpha)$.
(c) Montrer que $C_\alpha = \zeta_1(\alpha)$.
(d) <u>Et pourtant, elle converge ... et je sais même calculer sa somme !!</u>
Il y a quelques jours, j'ai affirmé sur un forum que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \simeq -1.460\,4$.
Suis-je un Galilé mathématique moderne ? Va-t-on faire mon procès chez Cauet ? :-)

Exercice 1.5 Soit $\alpha > 0$; on pose $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^\alpha$.

1. Trouver un équivalent de a_n.
2. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.

Exercice 1.6 1. Convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant r} \binom{n}{r} x^n$. On note $s_r(x)$ sa somme.

2. Etablir une relation de récurrence entre $s_{r+1}(x)$ et $s_r(x)$. En déduire l'expression de $s_r(x)$.

Exercice 1.7 Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^b}))^{n^a}$ $(a > 0, b > 0)$.

Exercice 1.8 On pose $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k^\alpha}\right)$ et $Q_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall \alpha > 0$, la suite $(Q_n)_n$ est convergente.

2. Pour quelles valeurs de α, la suite $(P_n)_n$ est-elle convergente ?
3. Lorsque $0 < \alpha < 1$, donner un équivalent de (P_n).

Exercice 1.9 Soit un réel $a > 0$. On suppose que $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^a u_n}$.

1. Trouver une condition sur a pour que la suite (u_n) converge.
2. Donner un équivalent simple de $u_n - \lambda$ si (u_n) tend vers λ, et si la suite diverge.

Exercice 1.10 On note $u_n = \binom{2n}{n}$.

1. Nature de la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{u_n}$ (sans Stirling !)
2. Donner un DAS de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ puis un équivalent de u_n (sans Stirling !)

Exercice 1.11 Convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+1/2+1/3+\cdots+1/n} - \frac{1}{\ln n}\right)$.

Exercice 1.12 Soit $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.
Trouver la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{u_n}$

www.mathematiques.fr.st

Observations :

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)