1 Exercices

Exercice 1.1 On considère les fonctions $f(x) = e\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

1. Donner les domaines de définition de chacune de ces fonctions.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$. En déduire l'équivalent de f en $+\infty$.
3. Etudier la continuité de ces fonctions sur leurs domaines de définition respectifs
4. Montrer que $f = g$. En déduire un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 1.2 On considère la suite de fonctions $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \sqrt{1 + x + u_{n-1}(x)} \quad \text{et} \quad u_0 = 0$$

Montrer que la suite de fonctions (u_n) est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa limite.

Exercice 1.3 Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de fonctions $(g_n)_n$ définie sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad g_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \min(x,t) g_n(t)dt$$

1. Pour quelles valeurs de λ, la suite $(g_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
2. Dans le cas d'une convergence uniforme, montrer que la solution g est solution d'une équation fonctionnelle.
3. Que peut-on dire de g lorsque $f = 0$?

Exercice 1.4 Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + x^n)$.

1. Préciser le domaine de définition de f, étudier sa continuité et sa dérivabilité.
2. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 1.5 Soit $(\sigma, \alpha) \in \mathbb{R}^2$
On considère la suite de fonctions $(y_n)_n$ définie sur $[0,b]$ par

$$\forall x \in [0,b], \quad y_n(x) = \sigma \int_0^x (y_{n-1}(x))^2 \sin(x-t)dt + \alpha \cos x$$

On suppose en outre que $|\sigma|\, b + |\alpha| < 1$.

1. Montrer que $|y_n(x)| < 1$ pour tout x de $[0,b]$.
2. Etudier la convergence de la suite de fonctions $(y_n)_n$.
3. On définit $g(x)$ comme la limite de la suite $(y_n(x))$.
   Montrer que g est solution d'une certaine équation différentielle.

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)