1 Exercices

Exercice 1.1 Soient $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ et $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$

1. Domaine de définition de f et de g
2. Donner un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 1.2 1. Développer de deux façons différentes $\frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)}$ en série entière.

2. En déduire $a_n = \text{card}\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } 2x_1 + 3x_2 = n\}$

Exercice 1.3 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad a_n = \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}$ avec $\alpha > -1$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définie par $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
2. Etudier l'existence de $f(x)$ aux bornes de l'intervalle de convergence.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définie par $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.
4. Montrer que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha}e^x$ lorsque x tend vers $+\infty$

   $\Gamma(x) \underset{\text{par définition}}{=} \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

Exercice 1.4 Domaine de définition de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 1.5 On pose $f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+x(\cos t)^2}$

1. Montrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0.
2. En déduire la valeur de $\int\limits_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n} dt$.
3. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n C_{2n}^n}{4^n}$.

Exercice 1.6 1. Donner le rayon de convergence de la série $\sum\limits_n \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right) x^n$

2. Etudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.

Exercice 1.7 On pose $I_n(x) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos nt}{1-x\cos t}dt$. Calculer $I_n(x)$ pour $|x| < 1$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.8 Calculer $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}$

Exercice 1.9 Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$ et $g(x) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence.
2. Montrer que $\exp(f)$ est également développable en série entière au voisinage de 0.

3. Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 1.10 On pose $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par F.
3. Exprimer D à l'aide des fonctions usuelles.

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)