1 Exercices

Exercice 1.1 1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Donner un équivalent de $\binom{2n^2+2pn}{4n^2}$ lorsque $n \to +\infty$.

2. Soit (n_i) une suite d'entiers pairs, (m_i) une suite d'entiers. On suppose que ces deux suites tendent vers $+\infty$.

   On suppose de plus que $m_i \leqslant n_i$ pour tout i et que $\dfrac{m_i - \dfrac{n_i}{2}}{\sqrt{n_i}}$ a une limite $p > 0$.

   Trouver un équivalent de $\binom{n_i}{m_i}$.

Exercice 1.2 On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin t)$.

1. Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0.
2. En déduire qu'elle est C^∞ au voisinage de 0.
3. Montrer qu'elle vérifie l'équation différentielle $(E) : xy'' + y' + xy = 0$
4. Déterminer toutes les solutions développable en série entière vérifiant (E).

Exercice 1.3 1. Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} k^k$ lorsque $k \to +\infty$.

2. Pouvez vous donner quelques termes suivants du développement asymptotique de u_n ?

Exercice 1.4 On considère $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

On introduit l'opérateur $g \in E \mapsto (Tg) : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)g(t)dt$

1. Justifier que T est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme subordonnée.
2. Soit $f \in E$. On considère la suite $(g_n)_n$ de E définie par $g_{n+1} = f + \lambda T g_n$
   (a) Montrer que pour tout $\lambda \in]-1,1[$, la suite $(g_n)_n$ converge dans E.
   (b) Dans ce cas, on note $g^{(\lambda,f)}$ sa limite.
   Montrer que la solution $g^{(\lambda,f)}$ est solution d'une équation fonctionnelle.
   (c) Que peut-on dire de $g^{(\lambda,f)}$ lorsque $f = 0$?
   (d) Peut-on affirmer la continuité de $(\lambda, f) \mapsto g^{(\lambda,f)}$?
   (e) Montrer que qu'il existe une suite d'éléments $(h_n^{(f)})$ de E tels que $g^{(\lambda,f)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n h_n^{(f)}$ lorsque $\lambda \in]-1,1[$.
   (f) La suite g_n converge-t-elle dans E lorsque $\lambda = 1$? $\lambda = -1$?

Exercice 1.5 Soit $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$. On considère la suite vectorielle $(\overrightarrow{u_n}) \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overrightarrow{u_{n+1}} = \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u_n}$ avec $\overrightarrow{u_0} \in \mathbb{R}^3$.

1. La série $\sum_n \dfrac{\overrightarrow{u_n}}{n!}$ est-elle convergente ? Que vaut sa somme ?
2. Supposons que la suite u soit convergente. Que peut-on dire de la limite ?
3. Etudier la convergence de la suite $(\overrightarrow{u_n})_n$.
4. La série $\sum_n \overrightarrow{u_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 1.6 1. Etudier la suite $u_{n+1} = 1 + \dfrac{a}{u_n}$ avec $u_0 > 0$ et $a > 0$.

2. Etudier la suite $v_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{v_n}$ avec $u_0 > 0$.
3. Donner un équivalent asymptotique de v.

Exercice 1.7 1. Développer de deux façons différentes $\dfrac{1}{(1-z^2)(1-z^3)}$ en série entière.

2. En déduire $a_n = \text{card}\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } 2x_1 + 3x_2 = n\}$
3. Proposer une généralisation de ce résultat.

Exercice 1.8 On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(x+n)}$

1. Domaine de définition de f, continuité, dérivabilité, variations.
2. Calculer $f(x) + f(x+1)$ lorsque $x > -1$.
3. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 1.9 On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et bornées.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit N_p, application de E dans $\mathbb{R}$: $N_p(f) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left| t^p e^{-|t|} f(t) \right|$.
   Montrer que N_p est une norme.
3. Soit φ_c, application de E dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi_c(f) = f(c)$.
   L'application φ_c est-elle continue relation à N_p ?
4. Soient p et q deux entiers naturels distincts. Montrer que N_p et N_q ne sont pas équivalentes.

Exercice 1.10 On considère la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(nx)}{2^n}$.

1. Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}^-$ puis que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^-$.
2. Calculer $f^{(k)}(0)$ et donner $\lim\limits_{k\to+\infty} f^{(k)}(0)$.
3. Pouvez vous donner un équivalent de $f^{(k)}(0)$ lorsque $k \to +\infty$?
4. Pouvez vous donner un équivalent de $u_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$ lorsque $k \to +\infty$?

Exercice 1.11 On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter ce développement.
2. Déterminer le rayon de convergence.

Exercice 1.12 Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{x^2+n^2}$ et $g(x) = \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)$

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence.
2. Montrer que $\exp(f)$ est également développable en série entière au voisinage de 0.
3. Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0.

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)