1 Exercices

Exercice 1.1 $0 < a < 1$, b et c des réels. Soit (x_n) la suite telle que $x_0 = c$ puis $x_{n+1} = a \sin x_n + b$.

1. Majorer $|x_{n+1} - x_n|$ en fonction de $|x_n - x_{n-1}|$
2. Montrer que c'est une suite de Cauchy.

Exercice 1.2 Soit z un complexe et u la suite définie par $u_n(z) = (1 + \frac{z}{n})^n$

1. Etudier la suite u lorsque $z \in \mathbb{R}$
2. Etudier la suite u lorsque $z \in i\mathbb{R}$
3. Etudier la suite u dans le cas général

Exercice 1.3 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$. Etudier la série de terme général $\dfrac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + (\sqrt{n})^{\ln n}}$.

Exercice 1.4 Nature de la série de terme général $u_n = (\frac{1}{n})^{1+1/n}$.

Exercice 1.5 Etudier la suite $u_{n+1} = \sqrt{u_n + a}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}_+$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et x_n en fonction de x_{n-1} puis inégalité des accroissements finis
2. De l'inégalité précédente, obtenir une majoration de $|x_{n+1}-x_n|$ dépend uniquement de a, n et $|x_1-x_0|$ puis donner une majoration de $|x_{n+p}-x_n|$ ($x_{n+p}-x_n = \sum\limits_{k=\dots}^{\dots} (x_{n+k+1}-x_{n+k})$)

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Que dire de $\ln u_n(z)$
2. Ecrire $u_n(z)$ en polaire et déterminer la limite de son module (cf. 1)
3. Même indication que précédemment en ajoutant la limite de l'argument (modulo 2π)

Indication pour l'exercice 1.3 : Chercher un équivalent (pour le numérateur déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{(\ln n)^{\sqrt{n}}}$ en écrivant $\dfrac{a^n}{(\ln n)^{\sqrt{n}}}$ sous forme exponentielle, même méthode pour le dénominateur). Pour $a = b$, factoriser par a^n le numérateur et le dénominateur puis effectuer un DL de $\dfrac{1}{1+\dfrac{(\sqrt{n})^{\ln n}}{a^n}}$

Indication pour l'exercice 1.4 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{1/n}}$

Indication pour l'exercice 1.5 : Si $a = 0$ et $u_0 > 0$, vérifier que $\ln u_n$ est bien définie et qu'il s'agit d'une suite standard Si $a > 0$, étudier la fonction $f(x) = \sqrt{x+a}$ (monotonie, points fixes, tableau de variations, intervalles stables) puis le signe de $f(x) - x$. En déduire la monotonie puis la convergence de la suite u selon l'intervalle stable auquel appartient la condition initiale.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. $|x_{n+1} - x_n| = |a\sin x_n + b - (a\sin x_{n-1} + b)| = a|\sin x_n - \sin x_{n-1}| \leqslant a|x_n - x_{n-1}|$ (inégalité des accroissements appliquée à $x \mapsto \sin x$)

2. L'inégalité précédente implique, par une récurrence immédiate que je laisse au lecteur, que $\forall n \geqslant 0,\quad |x_{n+1} - x_0| \leqslant a^n|x_1 - x|$.
Nous en déduisons la majoration suivante
$$\begin{aligned}\forall n &\in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^{\times}, \\ |x_{n+p} - x_n| &= \left|\sum_{k=0}^{p-1}(x_{n+k+1} - x_{n+k})\right| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1}|x_{n+k+1} - x_{n+k}| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} a^{n+k}|x_1 - x_0| = a^n\sum_{k=0}^{p-1}a^k|x_1 - x_0| \\ &= a^n|x_1 - x_0|\frac{1 - a^p}{1 - a} \leqslant \frac{a^n|x_1 - x_0|}{1 - a} \quad (a < 1)\end{aligned}$$
La suite $(\dfrac{a^n|x_1 - x_0|}{1 - a})_{n\geqslant 0}$ est indépendante de p et elle tend vers 0 donc la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy.
On peut également utiliser la méthode epsiloniène : la suite géométrique $(\dfrac{a^n|x_1 - x_0|}{1 - a})_{n\geqslant 0}$ *étant géométrique de raison* $a \in]0,1[\subset]-1,1[$, *elle converge vers* 0 *donc* $\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N(\varepsilon)$ *tel que* $\forall n \geqslant N(\varepsilon),\quad \dfrac{a^n|x_1 - x_0|}{1 - a} < \varepsilon$. *Cette dernière majoration étant indépendante de* p, *on en déduit que*
$$\forall \varepsilon > 0,, \quad \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Correction de l'exercice 1.2 : Soit z un complexe et u la suite définie par $u_n(z) = (1 + \dfrac{z}{n})^n$

1. Puisque z est réel, la suite u est à termes réels strictement positifs et l'on a $\ln u_n(z) = n\ln(1 + \dfrac{z}{n})$. Puisque $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\dfrac{z}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on en déduit que $\ln u_n(z) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \dfrac{z}{n} = z$ donc la suite $\ln u_n(z)$ tend vers z, ce qui implique que $u_n(z)$ tend vers e^z.

2. Puisque $z \in i\mathbb{R}$, il existe un réel x tel $z = ix$. Alors on a $u_n(z) = (1 + \dfrac{ix}{n})^n$. Ecrivons $u_n(z)$ sous forme polaire. Son module est donné par
$$|u_n(z)| = \left|1 + \frac{ix}{n}\right|^n = (1 + \frac{x^2}{n^2})^{n/2}$$
Pour l'argument, on utilise que $\arg u_n(z) = n\arg\left(1 + \dfrac{ix}{n}\right)$ ce qui nous ramène à déterminer l'argument φ_n de $1 + \dfrac{ix}{n}$.
On sait que $\tan\varphi_n = \dfrac{x}{n}$ (si $z = a + ib$ alors $\tan(\arg z) = \dfrac{b}{a}$, il suffit de faire un dessin). On en déduit que $\varphi_n = \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right) \bmod \pi$. Puisque $\left|1 + \dfrac{ix}{n}\right|\cos\varphi_n = 1$, on obtient que $\cos\varphi_n \geqslant 0$ donc $\varphi_n \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$. L'argument appartenant à $]-\pi,\pi[$, on en déduit que $\varphi_n = \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right) \bmod 2\pi$.
Nous pouvons dès lors écrire
$$u_n(z) = (1 + \frac{x^2}{n^2})^{n/2}\exp\left[in\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right].$$
En suivant la méthode de la question 1, on constate que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 + \dfrac{x^2}{n^2})^{n/2} = 1$. Pour finir, le fait que $\arctan t \underset{t\to 0}{\sim} t$ et que $\dfrac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on a $n\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \dfrac{x}{n} = x$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right) = x$. Ayant déterminer les limites du module et de l'argument de $u_n(z)$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(z) = 1 \times e^{ix} = e^{ix} = e^z$ (puisque $z = ix$)

3. Si l'on écrit $z = x + iy$, on a $u_n(z) = (\left[1 + \dfrac{x}{n}\right] + i\dfrac{y}{n})^n$. Nous allons suivre la méthode de la question 2. Un calcul direct montrr que
$$|u_n(z)| = \left|\left[1 + \frac{x}{n}\right] + i\frac{y}{n}\right|^n = \left(\left[1 + \frac{x}{n}\right]^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2}$$

D'autre part, on a
$$\arg u_n(z) = n \arg\left(\left[1+\frac{x}{n}\right] + i\frac{y}{n}\right)$$
et en posant $\varphi_n = \arg\left(\left[1+\frac{x}{n}\right] + i\frac{y}{n}\right)$, on obtient
$$\tan\varphi_n = \frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} \Rightarrow \varphi_n = \arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) \bmod \pi \tag{1}$$
Puisque $|u_n(z)|\cos\varphi_n = 1+\frac{x}{n} > 0$ pour n assez grand, on en déduit que $\cos\varphi_n \geqslant 0$ pour n assez grand donc $\varphi_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour n assez grand. Cet encadrement de φ_n combiné à l'égalité (1) et au fait que $\arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on peut affirmer que pour n assez grand, on a
$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)$$
Cela nous permet d'écrire, pour n assez grand
$$u_n(z) = \left(\left[1+\frac{x}{n}\right]^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2} \exp\left[i\arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)\right]$$
Ensuite, d'une part, on a
$$\begin{aligned}\ln\left(\left[1+\frac{x}{n}\right]^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2} &= \frac{n}{2}\ln\left(\left[1+\frac{x}{n}\right]^2 + \frac{y^2}{n^2}\right) = \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+o(\frac{1}{n})\right) = x+o(1)\\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\left[1+\frac{x}{n}\right]^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2} = x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\left[1+\frac{x}{n}\right]^2 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2} = e^x\end{aligned}$$
et d'autre part, on a
$$\arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{y}{n} \Rightarrow n\arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) = n\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y$$
(car $\arctan t \underset{t\to0}{\sim} t$).
Nous pouvons désormais conclure que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n(z) = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z.$$

Correction de l'exercice 1.3 : La série étant à termes positifs, nous allons déterminer un équivalent de son terme général.

- Si $a > 1$, on a
$$\frac{a^n}{(\ln n)^{\sqrt{n}}} = \frac{\exp(n\ln a)}{\exp(\sqrt{n}\ln(\ln n))} = \exp(n\ln a - \sqrt{n}\ln(\ln n)).$$
Puisque $\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$, on en obtient que $\sqrt{n}\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$ donc
$$n\ln a - \sqrt{n}\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\underbrace{\ln a}_{>0} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$$
et $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{(\ln n)^{\sqrt{n}}} = 0$, ce qui justifie que
$$(\ln n)^{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o(a^n)\ .$$
En particulier, on a
$$a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n.$$

- Si $b > 1$, on a
$$\frac{b^n}{(\sqrt{n})^{\ln n}} = \frac{\exp(n\ln b)}{\exp(\ln n\left[\ln n^{1/2}\right])} = \frac{\exp(n\ln b)}{\exp((\ln n)^2/2)}\exp(n\ln b - \frac{(\ln n)^2}{2})$$
Puisque $(\ln n)^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$, on en obtient que
$$n\ln a - \frac{(\ln n)^2}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\underbrace{\ln b}_{>0} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$
et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b^n}{(\sqrt{n})^{\ln n}} = 0$, ce qui justifie que
$$(\sqrt{n})^{\ln n} \underset{n\to+\infty}{=} o(b^n)\ .$$
En particulier, on a
$$b^n + (\sqrt{n})^{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} b^n.$$

- Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors la suite $(a^n)_n$ est borné et la suite $(\ln n)^{\sqrt{n}}$ tend vers $+\infty$ donc $a^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left((\ln n)^{\sqrt{n}}\right)$. En particulier, on a
$$a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} (\ln n)^{\sqrt{n}}.$$

- Si $0 \leqslant b \leqslant 1$ alors la suite $(b^n)_n$ est borné et la suite $(\sqrt{n})^{\ln n}$ tend vers $+\infty$ donc $b^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left((\sqrt{n})^{\ln n}\right)$. En particulier, on a
$$b^n + (\sqrt{n})^{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} (\sqrt{n})^{\ln n}.$$

Des formules asymptotiques précédente, on en déduit que

- Si $a > 1$ et $b > 1$, on dispose de l'équivalent suivant :
$$\frac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + (\sqrt{n})^{\ln n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$
La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{a}{b}\right)^n$ étant géométrique, elle converge ssi $\frac{a}{b} < 1$, c'est-à-dire $a < b$. Le terme général de cette dernière série étant positive, le théorème de comparaison montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + (\sqrt{n})^{\ln n}}$ converge ssi $a < b$.

- Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $b > 1$, on dispose de l'équivalent suivant :
$$\frac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + (\sqrt{n})^{\ln n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n}.$$
Intuitivement, cette dernière suite tend rapidement vers 0 (en raison de la croissance molle du ln et de la racine carrée et de convergence rapide de la suite géométrique), montrons qu'elle tend plus vite vers 0 que $\frac{1}{n^2}$.
$$n^2\frac{(\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n} = \exp\left[\underbrace{\sqrt{n}\ln(\ln n) + 2\ln n - n\ln b}_{\to-\infty}\right] \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ (car } n\ln b \text{ est le terme dominant).}$$
donc $\frac{(\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n} \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{n^2})$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ étant une série absolument convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), le théorème de comparaison montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n}$ est convergente. Cette dernière série étant à termes positifs et étant convergente, le théorème de comparaison montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + (\sqrt{n})^{\ln n}}$ converge.

- Si $a > 1$ et $0 \leqslant b \leqslant 1$, on dispose de l'équivalent suivant :
$$\frac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + (\sqrt{n})^{\ln n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^n}{(\sqrt{n})^{\ln n}}.$$

Cette dernière suite tend vers $+\infty$ (la suite géométrique converge plus vite vers $+\infty$ que le dénominateur). Pour cela, il suffit d'écrire

$$\frac{a^n}{(\sqrt{n})^{\ln n}} = \exp\left[n\underbrace{\ln a}_{>0} - \frac{(\ln n)^2}{2}\right] \to +\infty \text{ (car } n\ln a \text{ est le terme dominant).}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + (\sqrt{n})^{\ln n}} = +\infty$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + (\sqrt{n})^{\ln n}}$ diverge grossièrement.

- Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $0 \leqslant b \leqslant 1$, on dispose de l'équivalent suivant :

$$\frac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + (\sqrt{n})^{\ln n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^{\ln n}} = \exp\left[\sqrt{n}\ln(\ln n) - \frac{(\ln n)^2}{2}\right]$$

Il est aisé de vérifier que

$$\sqrt{n}\ln(\ln n) - \frac{(\ln n)^2}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^{\ln n}} = +\infty$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + (\sqrt{n})^{\ln n}} = +\infty$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + (\sqrt{n})^{\ln n}}$ diverge grossièrement.

En conclusion, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + (\sqrt{n})^{\ln n}}$ converge seulement si $(a < b)$ ou si $(a \leqslant 1$ et $b > 1)$

Correction de l'exercice 1.4 : Déterminons un équivalent du terme général : $(\dfrac{1}{n})^{1+1/n} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n^{1/n}} = \dfrac{1}{n} \times \exp\left[-\dfrac{\ln n}{n}\right]$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left[-\dfrac{\ln n}{n}\right] = \exp(0) = 1$ donc $u_n = (\dfrac{1}{n})^{1+1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ étant positive et divergente (série de Riemann avec $\alpha = 1$), le théorème de comparaison nous montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

Correction de l'exercice 1.5 : Puisque $u_0 \in \mathbb{R}_+$, une récurrence immédiate montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in \mathbb{R}_+$.

- Cas où $a = 0$. La suite u est définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
Si $u_0 = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$.
Si $u_0 > 0$, une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$. En passant au logarithme dans la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ (ce qui est possible car $\forall n \geqslant 0, \quad u_n > 0$), on obtient $\ln u_n = \dfrac{1}{2}\ln u_n$ donc la suite $(\ln u_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, ce qui implique qu'elle converge vers 0 donc la suite u converge vers $e^0 = 1$.

- Cas où $a > 0$.
On introduit la fonction $f(x) = \sqrt{x+a}$. Puisque la suite u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, il suffit d'étudier cette fonction sur $\mathbb{R}_+$.

  – Elle est clairement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

  – Ses points fixes sont les solutions de l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+a} = x$. Puisque qu'une racine carrée est nécessairement positive, on en déduit que les solutions sont nécessairement positives. En outre, les deux membres de l'égalité précédentes étant nécessairement positifs, l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x + a = x^2$ dont les racines sont $x_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2}$. La seule racine positive étant x_+, on en déduit que $\dfrac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$ est l'unique point fixe de f.

  – Un tableau de variations montre que les intervalles $[0, x_+]$ et $[x_+, +\infty[$ sont stables par f.

  – Puisque $f(x) - x = \sqrt{x+a} - x = \dfrac{x + a - x^2}{\sqrt{x+a} + x}$ (quantité conjuguée), on en déduit que le signe de $f(x) - x$ est celui du trinôme $x + a - x^2$ dont les racines sont x_- et x_+. En particulier, on obtient que $f(x) - x \geqslant 0$ sur $[0, x_+]$ et $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[x_+, +\infty[$

Supposons que $u_0 \in [0, x_+]$.
L'intervalle $[0, x_+]$ étant stable par f et la condition initiale u_0 appartenant à $[0, x_+]$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, x_+]$. En voici la démonstration par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $u_n \in [0, x_+]$. L'initialisation est évidente. Si $u_n \in [0, x_+]$ alors, par stabilité de $[0, x_+]$ par f, on a $f(x_n) \in [0, x_+]$ donc $x_{n+1} \in [0, x_+]$, ce qui démontre l'hérédité et

ce qui achève la récurrence.
Déterminons maintenant la monotonie de la suite u : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ et puisque $u_n \in [0, x_+]$ et que $f(x) - x$ est positif sur $[0, x_+]$, on en déduit que $f(u_n) - u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout entier n, ce qui signifie que la suite u est croissante. En outre, elle est majorée par x_+ donc elle converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite L qui appartient à $[0, x_+]$. Cette limite L étant nécessairement un point fixe de f, on en déduit que $L = x_+$, autrement dit, la suite u converge vers $\dfrac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$.
Je laisse le soin au lecteur de traiter lui-même le cas où $u_0 \in [x_+, +\infty[$ (tous les termes de la suite u appartiennent à cet intervalle, la suite u est décroissante, minorée par x_+ donc elle converge et sa limite est x_+).
Bien entendu, si $u_0 = x_+$ alors la suite u est constante.

Remarque : *On peut montrer que la convergence de la suite u vers $x_+ = \dfrac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2} > 1$ (car $a > 0$) est au moins géométrique. Pour cela, on utilise le fait qu' il existe un entier N (dépendant de a et de u_0) tel que pour tous les entiers $n \geqslant N$, $u_n \geqslant 1$. La fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{x+a}$ est de classe C^1 sur cet intervalle et*

$$\forall x \in [1, +\infty], \quad |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x+a}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1+a}}$$

Ensuite, en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[1, +\infty[$ à la fonction f aux points $x = u_n$ (qui appartient à $[1, +\infty[$ si $n \geqslant N$) et $y = x_+$, on obtient

$$\forall n \geqslant N, \quad |f(u_n) - f(x_+)| \leqslant \frac{|u_n - x_+|}{2\sqrt{1+a}} \Leftrightarrow |u_{n+1} - x_+| \leqslant \frac{|u_n - x_+|}{2\sqrt{1+a}}$$

Une récurrence classique montre que

$$\forall n \geqslant N, \quad |u_n - x_+| \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{1+a}}\right)^{n-N} |u_N - x_+|,$$

ce qui montre qu'à partir d'un certain rang, la convergence de la suite u converge vers $x_+ = \dfrac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$ au moins à une vitesse géométrique de $\dfrac{1}{2\sqrt{1+a}} < \dfrac{1}{2}$.