1 Exercices

Exercice 1.1 Nature des séries suivantes

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\quad (\alpha\in\mathbb{R});\qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\ln n}{n},\qquad ,\sum_{n\geqslant 1}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n}),\qquad \sum_{n\geqslant 1}(\ln n)\left[\ln(1+\frac{(-1)^n}{n})\right]$$

Exercice 1.2 Soit x un réel. Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n!x^{2n+1}}{1\times 3\times ..\times(2n+1)}$

Exercice 1.3 Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 1.4 Nature des séries suivantes

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1+n^{\alpha}}{n^{2\alpha}},\qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1+(-1)^n n^{\alpha}}{n^{2\alpha}},\qquad \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{1+(-1)^n n^{\alpha}}$$

Pour la dernière série, et pour elle seule, on suppose $\alpha>0$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Pour la première minorer simplement le terme générale de la série. En déduire les cas de divergence. Pour les cas restants, se rappeler que $\ln n = o(n^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Pour la seconde série il s'agit d'une série alternée et pour les deux dernières séries, déterminer un DL contenant le terme général d'une série absolument convergente

Indication pour l'exercice 1.2 : D'alembert pour commencer. Ensuite, pour les cas litigieux, montrer qu'il suffit d'étudier seulement l'un des cas litigieux. Dans ce cas, déterminer un réel α tel que la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln \frac{z_{n+1}}{z_n}$ soit convergente avec $z_n = n^\alpha \frac{n!x_0^{2n+1}}{1\times 3\times .. \times (2n+1)}$. En déduire un équivalent de $\frac{n!x_0^{2n+1}}{1\times 3\times .. \times (2n+1)}$ puis conclure

Indication pour l'exercice 1.3 : Comparer le terme général à celui du terme général d'une série de Riemann bien choisie

Indication pour l'exercice 1.4 : Pour les deux premières séries, il s'agit de la somme de deux séries classiques, pour la dernière déterminer les cas de divergence grossière puis les cas de convergence absolue et enfin pour les cas litigieux, effectuer un DL jusqu'à l'obtention du terme général d'une série absolument convergente

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

- $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}$: Il est de notoriété publique que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ est divergente si $\alpha\leqslant 1$ et puisque pour $n\geqslant 3$, on a $\dfrac{\ln n}{n^\alpha}\geqslant\dfrac{1}{n^\alpha}$ (car $\ln n\geqslant 1$ pour $n\geqslant 3$), on en déduit, par utilisation du théorème de comparaison pour les inégalités, que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ est divergente pour $\alpha\leqslant 1$.

  Lorsque $\alpha>1$, on utilise la limite classique suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^\varepsilon}=0$, valable pour tout $\varepsilon>0$, que l'on peut écrire aussi $\ln n\underset{n\to+\infty}{=}o(n^\varepsilon)$. On en déduit la comparaison suivante : $\dfrac{\ln n}{n^\alpha}\underset{n\to+\infty}{=}o(\dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}})$ valable quel que soit $\varepsilon>0$. En particulier, puisque $\alpha>1$ il existe nécessairement un réel $\varepsilon(\alpha)>0$ tel que $\alpha-\varepsilon(\alpha)>1$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon(\alpha)}}$ est alors absolument convergente (série de Riemann avec $\alpha-\varepsilon(\alpha)>1$) et le théorème de comparaison (concernant les o) montre alors que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ est convergente.

- $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$: Cette série n'est pas absolument convervgente (car la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln n}{n}$ est divergente, cf. la série précédente). Nous allons alors essayer d'appliquer le théorème des séries alternées. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$ est une série alternée dont la valeur absolue tend vers 0. La fonction $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et admet pour dérivée la fonction $x\mapsto\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ qui est négative pour $x\geqslant e$. On en déduit que la suite $(\dfrac{\ln n}{n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir du rang 3. Toutes les hypothèses du théorème des séries alternées étant vérifiées, on peut dès lors affirmer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 3}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$ est convergente, ce qui implique la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$.
  On remarque que cette série n'est pas absolument convergente (cf. l'étude précédente)

- $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln(1+\dfrac{(-1)^n}{n})$: **Un raisonnement faux** : On serait tenté d'utiliser l'argument suivant : puisqu'on dispose de l'équivalent suivant : $\ln(1+\dfrac{(-1)^n}{n})\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{(-1)^n}{n}$ et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente (série alternée dont la valeur absolue du terme général décroit vers 0), on en déduit, par comparaison, que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln(1+\dfrac{(-1)^n}{n})$ est convergente. **CE RAISONNEMENT EST FAUX** car le théorème de comparaison concernant les équivalents exige que l'une des deux séries soit à termes de signe constant à partir d'un certain rang (l'équivalence impliquant le signe des termes de l'autre série). Or dans le cas considérer, la suite $\dfrac{(-1)^n}{n}$ n'est jamais de signe constant à partir d'un certain rang.
  Remarque : Il arrive parfois que le terme général u_n d'une série admette un équivalent v_n qui ne soit pas de signe à partir d'un certain mais tel que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}v_n$ soit absolument convergent. Dans ce cas, on remarque que $|u_n|\underset{n\to+\infty}{\sim}|v_n|$, la série de terme général $|v_n|$ est positive et convergente donc le théorème de comparaison montre que $\sum\limits_{n\geqslant 0}|u_n|$ est convergente, ce qui implique la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$. Par exemple, c'est le cas pour la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln(1+\dfrac{(-1)}{n^2})$
  Un raisonnement juste : L'équivalent n'étant pas suffisant, nous allons affiner. Pour cela, nous allons chercher un DL de $\ln(1+\dfrac{(-1)^n}{n})$ jusqu'à l'obtention du terme général d'une série absolument convergente ou du terme général d'une série à termes de signe constant (à partir d'un certain rang). Dans notre cas, il suffit simplement d'effectuer le DL à l'ordre 2 de $x\mapsto\ln(1+x)$, ce qui nous donne
  $$\ln(1+\frac{(-1)^n}{n})\underset{n\to+\infty}{=}\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$
  La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente (série alternée dont la valeur absolue du terme général décroit vers 0). Puisque $-\dfrac{1}{2n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{2n^2}$ et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}-\dfrac{1}{2n^2}$ est convergente et à termes toujours négatifs, le théorème de

comparaison pour les équivalences s'applique, ce qui montre que la série $\sum_{n\geqslant 1} -\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$ est convergente. Pour finir, la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$ est la somme de deux séries convergentes donc elle est convergente.

Remarque : utiliser cette méthode pour déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{1+(-1)^n n^\alpha}$ *avec* $\alpha \in]0,1]$.

- $\sum_{n\geqslant 1} (\ln n)\left[\ln(1+\frac{(-1)^n}{n})\right]$: Comme nous l'avons vu sur la série précédente, il n'est pas possible d'utiliser un équivalent (l'équivalent n'est pas de signe constant et n'est pas absolument convergent). Effectuons un DL jusqu'à l'obtention du terme général d'une série à signe constant (à partir d'un certain rang) ou absolument convergente.

$$\ln(1+\frac{(-1)^n}{n}) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \Rightarrow (\ln n)\left[\ln(1+\frac{(-1)^n}{n})\right] \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n\ln n}{n}-\frac{\ln n}{2n^2}+o(\frac{\ln n}{2n^2})$$

Nous avons vu précédemment que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$ est convergente. D'autre part, nous disposons de l'équivalent suivant :

$$-\frac{\ln n}{2n^2}+o(\frac{\ln n}{2n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{2n^2}.$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} -\frac{\ln n}{2n^2}$ est de signe constant. Montrons qu'elle est convergente. En effet, nous avons la comparaison suivante $-\frac{\ln n}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{n^{3/2}})$ (car $\ln n \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$. Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ est absolument convergente, le théorème de comparaison (concernant les o) montre que la série $\sum_{n\geqslant 1} -\frac{\ln n}{2n^2}$ est convergente et l'application du théorème de comparaison pour les équivalents implique que la série $\sum_{n\geqslant 1} -\frac{\ln n}{2n^2}+o(\frac{\ln n}{2n^2})$ est convergente. Si l'on combine ceci au fait que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$ est convergente, on peut conclure que la série $\sum_{n\geqslant 1}(\ln n)\left[\ln(1+\frac{(-1)^n}{n})\right]$ est convergente.

Correction de l'exercice 1.2 : Il semble clair que le critère de d'Alembert est un excellent candidat pour cette série (le terme général est définition uniquement par des multiplications et des divisions). On n'oublie pas pour commencer de s'assurer que le terme général ne s'annule pas à partir d'un certain rang (sinon le critère de d'Alembert ne peut s'appliquer).
Posons $u_n(x)=\frac{n!x^{2n+1}}{1\times 3\times .. \times(2n+1)}$
Si $x=0$ alors $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n(0)=0$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n(0)$ converge trivialement.
Si $x\neq 0$, alors $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n(x)\neq 0$. Puisque l'on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)!x^{2(n+1)+1}}{1\times 3\times .. \times(2(n+1)+1)}}{\frac{n!x^{2n+1}}{1\times 3\times .. \times(2n+1)}}\right| = \frac{n!(n+1)\left|x\right|^{2n+1}\left|x\right|^2}{1\times 3\times .. \times(2n+1)\times(2n+3)}\times\frac{1\times 3\times .. \times(2n+1)}{n!\left|x\right|^{2n+1}} = \frac{(n+1)}{(2n+3)}\left|x\right|^2, \quad (1)$$

on constate que le quotient $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}$ admet $\frac{|x|^2}{2}$ comme limite. Puisque $\frac{|x|^2}{2}<1$ (resp. $\frac{|x|^2}{2}>1$) ssi $|x|<\sqrt{2}$ (resp. $|x|>\sqrt{2}$), le critère de d'Alembert montre que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!x^{2n+1}}{1\times 3\times .. \times(2n+1)}$ converge absolument si $x\in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ et diverge grossièrement si $x\in]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$.
Il nous reste à traiter les cas $x=\sqrt{2}$ et $x=-\sqrt{2}$. En remarquant que si $x=-\sqrt{2}$, la série s'écrit $-\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!2^n\sqrt{2}}{1\times 3\times .. \times(2n+1)}$ et si $x=\sqrt{2}$ la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!2^n\sqrt{2}}{1\times 3\times .. \times(2n+1)}$, il suffit donc d'étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n(\sqrt{2})$.
La série $\sum_{n\geqslant 0}u_n(\sqrt{2})$ est à termes positifs et le calcul précédent montre que

$$\frac{u_{n+1}(\sqrt{2})}{u_n(\sqrt{2})}=\frac{2(n+1)}{2n+3}=\frac{2n+2}{2n+3}=\frac{2n+3-1}{2n+3}=1-\frac{1}{2n+3}=1-\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})$$

Recherchons un réel α tel que, si l'on introduit la suite z définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = n^\alpha u_n$, la suite $\left[\ln\left(\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right)\right]_{n\geqslant 1}$ vérifie

$$\ln\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O(\frac{1}{n^2}).$$

On a les égalités suivantes

$$\ln\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}\right) = \alpha \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln\left[1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})\right] = \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$$

Si l'on choisit $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on a donc

$$\ln\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O(\frac{1}{n^2}) \Leftrightarrow \ln z_{n+1} - \ln z_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\frac{1}{n^2})$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est absolument convergente donc, d'après le théorème de comparaison pour les O, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln z_{n+1} - \ln z_n$ converge absolument donc elle est convergente. Ceci implique que la suite $(\ln(z_n))_n$ converge vers un réel L (la preuve est à la fin de la correction) donc

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = L \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} z_n = e^L \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} n^{1/2} u_n(\sqrt{2}) = e^L \Leftrightarrow u_n(\sqrt{2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^L}{n^{1/2}}$$

Puisque la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{e^L}{n^{1/2}}$ est positive et divergente ($\dfrac{1}{2} \leqslant 1$), le théorème de comparaison pour les équivalents montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(\sqrt{2})$ diverge, ce qui implique la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(-\sqrt{2})$.

Conclusion : la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n!x^{2n+1}}{1\times 3\times .. \times (2n+1)}$ converge ssi $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

Remarque : *Rappelons qu'une série* $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ *converge ssi la suite* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ *converge. Dans ce cas, on note* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. *En particulier, la convergence de la série* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(z_{n+1}) - \ln z_n$ *implique la convergence de la suite* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln z_{k+1} - \ln z_k = \ln z_{n+1} - \ln z_1$ *(par les dominos) donc celui de la suite* $(\ln z_{n+1})_n$ *donc de la suite* $(\ln z_n)_n$.

Correction de l'exercice 1.3 : Intuivement $e^{-\sqrt{n}}$ tend beaucoup plus vite vers 0 que n^2 vers $+\infty$ donc on peut espérer que pour n $n^2e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o(\dfrac{1}{n^2})$. Justifions ce fait : puisque l'on a $n^4e^{-\sqrt{n}} = \exp(4\ln n - \sqrt{n})$ et que $4\ln n - \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sqrt{n}$, on en déduit que $4\ln n - \sqrt{n}$ tend vers $-\infty$ donc $n^4e^{-\sqrt{n}}$ tend vers 0, ce qui démontre que $n^2e^{-\sqrt{n}} = \underset{n\to+\infty}{=} o(\dfrac{1}{n^2})$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ étant absolument convergente, le théorème de comparaison (concernant les o) s'applique donc on peut affirme que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2e^{-\sqrt{n}}$ converge.

Correction de l'exercice 1.4 :

- $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1+n^\alpha}{n^{2\alpha}}$: Pour commencer, on remarque que $\dfrac{1+n^\alpha}{n^{2\alpha}} = \dfrac{1}{n^{2\alpha}} + \dfrac{1}{n^\alpha}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ converge ssi $2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \dfrac{1}{2}$. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1+n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ converge ssi $\alpha > 1$.

- $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$: Il faut commencer par éviter l'erreur suivante : bien que la somme de deux séries convergentes soit convergente et que la somme d'une série divergente et d'une série convergente soit divergente, on ne peut rien dire de la somme de deux séries divergentes (par ex : $1 + \dfrac{1}{n^2}$ ou $\dfrac{1}{n} + (-\dfrac{1}{n})$). Ici ce dernier cas se présente lorsque $\alpha \leqslant 0$.

  Si $\alpha = 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ est simplement la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1+(-1)^n$ qui diverge grossièrement car son terme général ne tend pas vers 0.

Si $\alpha < 0$ alors $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ (car les suites n^α et $n^{2\alpha}$ tendent vers 0 par valeurs positives) donc la série est grossièrement divergente.

Traitons le cas $\alpha > 0$. Pour commencer, on remarque que $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}} = \dfrac{1}{n^{2\alpha}} + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroit vers 0 (car $\alpha > 0$) donc le théorème sur les séries alternées montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente quel que soit $\alpha > 0$. L'autre série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ converge ssi $\alpha > 1$ (traiter le cas $\alpha > 1$ puis le cas $0 < \alpha \leqslant 1$).

Conclusion : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ converge ssi $\alpha > 1$