1 Exercices

Exercice 1.1 Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(1+\frac{1}{n^{1/3}})$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}})$

Exercice 1.2 On pose $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k^{2/3}}\right)$ et enfin $T_n = \ln P_n - 3n^{1/3}$

1. Montrer que la suite P diverge vers $+\infty$.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (T_{n+1} - T_n)$ converge. En déduire que la suite T converge dans $\mathbb{R}$
3. Donner un équivalent de P_n

Exercice 1.3 Soient a et b deux réels. Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a^n \operatorname{ch} nb$ et, lorsqu'il y a convergence, calculer la somme

Exercice 1.4 Soient a et b deux réels strictement positifs. Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$

Exercice 1.5 Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{1+n^4}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n n^3}{1+n^4}$

Exercice 1.6 Soient a et b deux réels strictement positifs. Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^b}\right)\right]^{n^a}$

Exercice 1.7 Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$. Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n + n^a}}$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Equivalent pour la première et théorème de comparaison.
Pour la seconde, on ne peut appliquer un théorème de comparaison (car ..), effectuer un $DL_2(0)$ de $\ln(1+x)$ pour en déduire que $\ln(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}}) = a_n + b_n + o(b_n)$. Etudier la nature de la série $\sum\limits_n a_n$ puis donner un équivalent de $\boxed{b_n + o(b_n)}$ et conclure.
Question subsidiaire (à faire lorsque l'on a fini l'exercice): Pourquoi ne pas étudier $\sum\limits_n b_n$ puis $\sum\limits_n o(b_n)$?

Indication pour l'exercice 1.2 : On pose $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k^{2/3}}\right)$ et enfin $T_n = \ln P_n - 3n^{1/3}$

1. Considérer $\ln P_n$ et vérifier que $\ln P_n$ est la somme partielle d'une série est .....gente et positive donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \cdots$
2. Ecrire $T_{n+1} - T_n$ sous la forme
$$\frac{1}{n^{1/3}(1+\frac{1}{n})^{2/3}} + 3n^{1/3}[(1+\frac{1}{n})^{1/3} - 1$$
puis utiliser les DL pour obtenir un équivalent de $T_{n+1} - T_n$.
Une série converge ssi la suite des sommes partielles converge puis, en utilisant les dominos (ou télescopage), évaluer cette somme partielle.
3. $\ln P_n - 3n^{1/3} = L + o(1)$ (à justifier) donc $\ln P_n = \cdots + o(1)$, passer à l'exponentielle et donner l'équivalent (attention $e^{b_n} \sim 1 \Leftrightarrow e^{b_n} \to 1 \Leftrightarrow b_n \to 0$ donc $e^{a_n+b_n} \sim e^{a_n}$ ssi $b_n \to 0$)

Indication pour l'exercice 1.3 : Evaluer les sommes partielles en utilisant que $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \cdots$ puis revoir le cours sur la définition de la convergence d'une série.

Indication pour l'exercice 1.4 : Si $a \geqslant b$, justifier par une minoration simple la divergence grossière.
Si $a < b$, passer en forme exponentielle et montrer que écrire le terme général sous forme exponentielle puis effectuer un DL suffisamment élevé pour obtenir un équivalent de $\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$
(attention $e^{b_n} \sim 1 \Leftrightarrow e^{b_n} \to 1 \Leftrightarrow b_n \to 0$ donc $e^{a_n+b_n} \sim e^{a_n}$ ssi $b_n \to 0$)

Indication pour l'exercice 1.5 : Pour la première série, un équivalent convient. Pour le second, comprendre pour cela ne convient pas (le théorème de comparaison exige que ..., a-t-on convergence absolue ?) Effectuer un DL de $\dfrac{1}{1+n^4}$ pour obtenir un DL convenable de $\dfrac{(-1)^n n^3}{1+n^4}$, i.e. de la forme $a_n + b_n + o(b_n)$ avec b_n soit de signe constant, soit terme d'une série absolument convergente. Donner la nature de $\sum\limits_n a_n$ puis utiliser que $b_n + o(b_n) \sim b_n$ si b_n est de signe constant $|b_n + o(b_n)| \sim |b_n|$ si $\sum\limits_n |b_n|$ converge, ensuite conclure sur la nature de la série $\sum\limits_n [b_n + o(b_n)]$.
Question subsidiaire : Pourquoi ne pas étudier directement $\sum\limits_n b_n$ puis $\sum\limits_n o(b_n)$?

Indication pour l'exercice 1.6 : Etudier les cas de divergence grossière.(si $b \leqslant 0$). Si $b > 0$, écrire le terme général sous forme exponentielle. Donner un équivalent simple de $n^b \ln\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{n^a}\right)$ ($\tan(a+b) = \cdots$) pour en déduire d'autres cas de divergence grossière. Dans les cas restants, comparer le terme général à $\dfrac{1}{n^2}$

Indication pour l'exercice 1.7 : Déterminer les valeurs pour lesquelles on a convergence absolue.
Pour les autres cas, effectuer un DL de
$$\frac{1}{\sqrt{(-1)^n + n^a}} = \frac{1}{n^{a/2}\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{n^a}}}$$
pour obtenir un DL convenable de $\dfrac{1}{\sqrt{(-1)^n + n^a}} = \dfrac{1}{n^{a/2}\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{n^a}}}$, i.e. de la forme $a_n + b_n + o(b_n)$ avec b_n soit de signe constant, soit terme d'une série absolument convergente. Donner la nature de $\sum\limits_n a_n$ puis utiliser que $b_n + o(b_n) \sim b_n$ si b_n est de signe constant $|b_n + o(b_n)| \sim |b_n|$ si $\sum\limits_n |b_n|$ converge, ensuite conclure sur la nature de la série $\sum\limits_n [b_n + o(b_n)]$.
Question subsidiaire : Pourquoi ne pas étudier directement $\sum\limits_n b_n$ puis $\sum\limits_n o(b_n)$?

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Etude de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln(1+\frac{1}{n^{1/3}})$: Puisque $\ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}x$ et que $\frac{1}{n^{1/3}}\underset{n\to+\infty}{\to}0$, on en déduit que

$$\ln(1+\frac{1}{n^{1/3}})\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^{1/3}}.$$

La suite $(\frac{1}{n^{1/3}})_{n\geqslant 1}$ étant positive, le théorème de comparaison sur les séries montre que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln(1+\frac{1}{n^{1/3}})$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{1/3}}$ sont de même nature. Puisque cette dernière série est une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{3}\leqslant 1$, on en déduit qu'elle diverge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln(1+\frac{1}{n^{1/3}})$ est également divergente.

Etude de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}})$: Il est inutile de rechercher un équivalent puisque la suite obtenue n'est pas de signe constant.

Remarque : Parfois, on a $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n$ avec $(v_n)_n$ une suite de signe non constant mais absolument convergente. L'équivalence passant à la valeur absolue, on a $|u_n|\underset{n\to+\infty}{\sim}|v_n|$. Par hypothèse, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}|v_n|$ converge, le théorème de comparaison par équivalent s'applique puisque la suite $(|v_n|)_n$ est de signe constant donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}|u_n|$ converge (convergence absolue de la série $\sum\limits_n u_n$), ce qui implique la convergence de la série $\sum\limits_n u_n$. Malheureusement, ce n'est pas le cas pour la série que nous étudions.

Puisque $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ et que $\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}}\to 0$, on a le développement limité suivant :

$$\ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}})=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}}-\frac{1}{2n^{2/3}}+o(\frac{1}{n^{2/3}})$$

- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}}$ est alternée, la valeur absolue de son terme général est $\frac{1}{n^{2/3}}$ qui décroit vers 0 donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}}$ converge.
- Par définition des o, on a l'équivalent suivant :

$$-\frac{1}{2n^{2/3}}+o(\frac{1}{n^{2/3}})\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2n^{2/3}}$$

La suite $(-\frac{1}{2n^{2/3}})_n$ est de signe constant donc les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left[-\frac{1}{2n^{2/3}}+o(\frac{1}{n^{2/3}})\right]$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}-\frac{1}{2n^{2/3}}$ sont de même nature. Puisque $\frac{2}{3}\leqslant 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}-\frac{1}{2n^{2/3}}=-\frac{1}{2}\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{2/3}}$ est divergente donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left[-\frac{1}{2n^{2/3}}+o(\frac{1}{n^{2/3}})\right]$ diverge.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}})$ est diverge puisqu'elle est la somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Correction de l'exercice 1.2 :

1. Puisque l'on dispose d'aucun théorème sur les suites de produits, on passe au logarithme, ce qui est possible car chaque facteur du produit est strictement positif.

$$\forall n\geqslant 1,\quad \ln P_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k^{2/3}})$$

Nous constatons alors que $\ln P_n$ est la $n^{ième}$ somme partielle de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\ln(1+\frac{1}{k^{2/3}})$ et nous savons que la suite des sommes partielles $(\ln P_n)_n$ converge ssi la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\ln(1+\frac{1}{k^{2/3}})$ converge. Or $\ln(1+\frac{1}{k^{2/3}})\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{k^{2/3}}$ qui est le terme général d'une suite positive divergente ($\frac{2}{3}\leqslant 1$) donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\ln(1+\frac{1}{k^{2/3}})$ est divergente et la suite $(\ln P_n)_n$ diverge. Cette dernière suite étant clairement croissante (somme de termes positifs), on en déduit qu'elle diverge vers $+\infty$.

2. Réduisons pour commencer la différence $T_{n+1}-T_n$ puis effectuons des développement limités suivants
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\quad\text{et}\quad(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)$$
afin d'obtenir un équivalent de $T_{n+1}-T_n$:
$$\begin{aligned}T_{n+1}-T_n &= \ln P_{n+1}-3(n+1)^{1/3}-(\ln P_n-3n^{1/3})=\sum_{k=1}^{n+1}\ln(1+\frac{1}{k^{2/3}})-\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k^{2/3}})-3((n+1)^{1/3}-n^{1/3})\\
&= \ln\left(1+\frac{1}{(n+1)^{2/3}}\right)-3n^{1/3}\left[(1+\frac{1}{n})^{1/3}-1\right]\\
&= \frac{1}{(n+1)^{2/3}}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+1)^{2/3}}\right]^2+o(\frac{1}{n^{4/3}})-3n^{1/3}\left[1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{n})^2+o(\frac{1}{n^2})-1\right]\\
&= \frac{1}{(n+1)^{2/3}}-\frac{1}{2(n+1)^{4/3}}+o(\frac{1}{n^{4/3}})-\frac{1}{n^{2/3}}+\frac{2}{3n^{5/3}}+o(\frac{1}{n^{5/3}})\\
&= \frac{1}{(n+1)^{2/3}}-\frac{1}{2(n+1)^{4/3}}-\frac{1}{n^{2/3}}+o(\frac{1}{n^{4/3}})\end{aligned}$$
(puisque $\frac{1}{2(n+1)^{4/3}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^{4/3}}\Leftrightarrow\frac{1}{2(n+1)^{4/3}}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{2n^{4/3}}+o(\frac{1}{n^{4/3}})$) donc
$$\begin{aligned}T_{n+1}-T_n &= \frac{1}{n^{2/3}}\times\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{2/3}}-\frac{1}{2(n+1)^{4/3}}-\frac{1}{n^{2/3}}+o(\frac{1}{n^{4/3}})\\
&= \frac{1}{n^{2/3}}\left(1-\frac{2}{3n}+o(\frac{1}{n})\right)-\frac{1}{2n^{4/3}}-\frac{1}{n^{2/3}}+o(\frac{1}{n^{4/3}})\\
&= \frac{1}{n^{2/3}}-\frac{1}{2n^{4/3}}-\frac{1}{n^{2/3}}+o(\frac{1}{n^{4/3}})=-\frac{1}{2n^{4/3}}+o(\frac{1}{n^{4/3}})\end{aligned}$$
ce qui démontre que $T_{n+1}-T_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2n^{4/3}}$. La suite $(-\frac{1}{2n^{4/3}})_{n\geqslant1}$ étant positive et convergente, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant1}(T_{n+1}-T_n)$ est convergente..
On se rappelle qu'une série converge ssi la suite de ses sommes partielles converge. Puisque la série $\sum_{n\geqslant1}(T_{n+1}-T_n)$ converge, on est assuré de la convergence de la suite $(\sum_{k=1}^{n}(T_{k+1}-T_k))_n=(T_{n+1}-T_1)_n$ donc la suite $(T_{n+1})_n$ converge, ce qui signifie que la suite $(T_n)_n$ est convergente.

3. La question précédente montre que la suite $(T_n=\ln P_n-3n^{1/3})_n$ est convergente. Soit L sa limite alors
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}T_n &= L\Leftrightarrow T_n\underset{n\to+\infty}{=}L+o(1)\Leftrightarrow\ln P_n\underset{n\to+\infty}{=}3n^{1/3}+L+o(1)\Leftrightarrow P_n\underset{n\to+\infty}{=}\exp(3n^{1/3}+L+o(1))\\
\Leftrightarrow\quad& P_n\underset{n\to+\infty}{=}\exp(3n^{1/3})\exp(L)\exp(o(1))\Leftrightarrow\frac{P_n}{\exp(3n^{1/3})\exp(L)}\underset{n\to+\infty}{=}\exp(o(1))\underset{n\to+\infty}{\to}\exp(0)=1\\
\Leftrightarrow\quad& P_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\exp(L)\exp(3n^{1/3})\end{aligned}$$
Nous venons donc de montrer que P_n est équivalent à $K\exp(3n^{1/3})$, où $K=\exp(L)$ est une constante réelle strictement positif
Remarque : à priori, on ne peut expliciter L donc K car nous ne connaissons pas la limite de la suite (T_n). Evitez en particulier de penser que $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$. Par exemple, $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$ et
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1\quad\text{et}\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Correction de l'exercice 1.3 : La somme partielle se calculant directement, on évite les grandes théories.

- Si $ae^{\pm b}\neq1$, on a
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}a^k\operatorname{ch}kb &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}a^ke^{kb}+\sum_{k=0}^{n}a^ke^{-kb}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(ae^b)^k+\sum_{k=0}^{n}(ae^{-b})^k\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-(ae^b)^{n+1}}{1-ae^b}+\frac{1-(ae^{-b})^{n+1}}{1-ae^{-b}}\right)\end{aligned}$$

Cette expression a une limite ssi $\left|ae^b\right| < 1$ et $\left|ae^{-b}\right| < 1$ ce qui équivaut à $|a| < e^b$ et $|a| < e^{-b}$, ce qui peut se résumer par $|a| < e^{-|b|}$ (si $b > 0$, alors $e^{-b} < e^b$, si $b < 0$, alors $e^{-b} > e^b$). Par conséquent, si $ae^{\pm b} \neq 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a^n \operatorname{ch} nb$ converge ssi $|a| < e^{-|b|}$ et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \operatorname{ch} nb = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1-(ae^b)^{n+1}}{1-ae^b} + \frac{1-(ae^{-b})^{n+1}}{1-ae^{-b}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ae^b} + \frac{1}{1-ae^{-b}}\right) = \frac{1}{2}\frac{2-ae^b-ae^{-b}}{(1-ae^b)(1-a^{-b})}$$

donc

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } ae^{\pm b} \neq 0, \quad \text{la série } \sum_{n\geqslant 0} a^n \operatorname{ch} nb \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \operatorname{ch} nb = \frac{1-a\operatorname{ch} b}{1-2a\operatorname{ch} b + a^2}$$

- Si $ae^b = 1$ et $ae^{-b} \neq 1$, cela équivaut à $a > 0$ et $b \neq 0$ (car $e^{2b} = \dfrac{ae^b}{ae^{-b}} \neq 1$) alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a^k \operatorname{ch} kb &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} a^k e^{kb} + \sum_{k=0}^{n} a^k e^{-kb}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(ae^b)^k + \sum_{k=0}^{n}(ae^{-b})^k\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{1-(ae^{-b})^{n+1}}{1-ae^{-b}}\right)\end{aligned}$$

  – Si $ae^{-b} \in]-1,1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-(ae^{-b})^{n+1}}{1-ae^{-b}} = \dfrac{1}{1-ae^{-b}}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k \operatorname{ch} kb = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$$

  et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a^n \operatorname{ch} nb$ est divergente.

  – Si $ae^{-b} = -1$ alors la suite $\dfrac{1-(ae^b)^{n+1}}{1-ae^{-b}} = \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2}$ est bornée et

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k \operatorname{ch} kb = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$$

  – Si $ae^{-b} \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$ alors $n+1 = o\left(\dfrac{1-(ae^{-b})^{n+1}}{1-ae^{-b}}\right)$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k \operatorname{ch} kb \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \frac{1-(ae^{-b})^{n+1}}{1-ae^{-b}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(ae^{-b})^{n+1}}{2(1-ae^{-b})}$$

  et cette dernière suite est n'admet pas de limite en $+\infty$ (car elle est alternée et sa valeur absolue tend vers $+\infty$)

- Si $ae^b \neq 1$ et $ae^{-b} = 1$, on procède de la même façon que précédemment pour obtenir que la suite $(\sum\limits_{k=0}^{n} a^k \operatorname{ch} kb)_n$ n'admet aucune limite finie.

- Si $ae^b = 1$ et $ae^{-b} = 1$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \operatorname{ch} kb = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(ae^b)^k + \sum_{k=0}^{n}(ae^{-b})^k\right) = n+1 \to +\infty$$

Conclusion :

$$\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} a^n \operatorname{ch} nb \text{ converge ssi } |a| < e^{-|b|} \text{ et dans ce cas } \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \operatorname{ch} nb = \frac{1-a\operatorname{ch} b}{1-2a\operatorname{ch} b+a^2}$$

Correction de l'exercice 1.4 : Pour commencer, on remarque que si $a \geqslant b$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+a}{n+b} \geqslant 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2} \geqslant 1$. Cette minoration implique que la suite $\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ ne peut converger vers 0 donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$

est grossièrement divergente.
On suppose maintenant que $a < b$ et on passe en écriture exponentielle (ce qui est la méthode générale d'étude des suites $(a_n)^{b_n}$).

$$\begin{aligned}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2} &= \exp(n^2\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)) = \exp(n^2\ln\left(\frac{n+b+a-b}{n+b}\right) = \exp(n^2\ln\left(1+\frac{a-b}{n+b}\right))\\ &= \exp\left(n^2\left[\frac{a-b}{n+b}-\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{n+b}\right)^2+o(\frac{1}{n^2})\right]\right) = \exp\left((a-b)\frac{n^2}{n+b}-\frac{1}{2}n^2\left(\frac{a-b}{n+b}\right)^2+o(1)\right)\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{2}n^2\left(\dfrac{a-b}{n+b}\right)^2 = -\dfrac{(a-b)^2}{2}$,

$$\frac{n^2}{n+b} = \frac{n^2+bn-bn}{n+b} = n - \underbrace{\frac{bn}{n+b}}_{\to b} = n-b+o(1),$$

on en déduit que

$$\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2} = \exp\left((a-b)n-(a-b)b-\frac{(a-b)^2}{2}+o(1)\right) = \exp\left((a-b)n\right)\underbrace{\exp(\frac{b^2-a^2}{2}+o(1))}_{\to\exp(\frac{b^2-a^2}{2})}$$

donc

$$\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(\frac{b^2-a^2}{2})\exp\left((a-b)n\right) = \exp(\frac{b^2-a^2}{2})\left[\exp(a-b)\right]^n$$

La suite $\left(\exp(\dfrac{b^2-a^2}{2})\left[\exp(a-b)\right]^n\right)_{n\geqslant 0}$ étant positive, la convergence de la série correspondante est équivalente à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$. Puisque $a < b$, on en déduit que $\exp(a-b)\in]0,1[\subset]-1,1[$, ce qui montre que la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left[\exp(a-b)\right]^n$ est convergente donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ est convergente.

Correction de l'exercice 1.5 : <u>Etude de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n^3}{1+n^4}$</u> : Puisque l'on dispose de l'équivalent $\dfrac{n^3}{1+n^4}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$ et que la suite $(\dfrac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ est positive, la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n^3}{1+n^4}$ est équivalente à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ qui est une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leqslant 1$) donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n^3}{1+n^4}$ est divergente.
<u>Etude de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n n^3}{1+n^4}$</u> : La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n n^3}{1+n^4}$ n'est pas absolument convergente car $\left|\dfrac{(-1)^n n^3}{1+n^4}\right| = \dfrac{n^3}{1+n^4}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série positive divergente. Nous allons alors étudier sa convergence. Pour cela, on va utiliser les développements limités. On a

$$\frac{(-1)^n n^3}{1+n^4} = \frac{(-1)^n n^3}{n^4}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n^4}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\times(1-\frac{1}{n^4}+o(\frac{1}{n^4})) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1)^n}{n^5}+o(\frac{1}{n^5})$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroit vers 0 donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente.
D'autre part, on a l'équivalent suivant : $-\dfrac{(-1)^n}{n^5}+o(\dfrac{1}{n^5})\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{(-1)^n}{n^5}$. La suite $(-\dfrac{(-1)^n}{n^5})_n$ n'étant pas de signe constant donc on ne peut utiliser le théorème de comparaison par équivalence des séries numériques. Néanmoins, cette dernière suite est le terme général d'une série convergente, ce qui va nous être fortement utile. En effet, on a

$$\left|-\frac{(-1)^n}{n^5}+o(\frac{1}{n^5})\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|-\frac{(-1)^n}{n^5}\right| = \frac{1}{n^5}.$$

La suite $(\frac{1}{n^5})_n$ est positive, donc les séries $\sum_n \left|-\frac{(-1)^n}{n^5}+o(\frac{1}{n^5})\right|$ et $\sum_n \frac{1}{n^5}$ sont de même nature. La série $\sum_n \frac{1}{n^5}$ étant une série de Riemann convergente, on en déduit que la série $\sum_n \left|-\frac{(-1)^n}{n^5}+o(\frac{1}{n^5})\right|$ est convergente. Autrement dit, la série $\sum_n \left|-\frac{(-1)^n}{n^5}+o(\frac{1}{n^5})\right|$ est absolument convergente donc convergente.

Par conséquent, la série $\sum_n \frac{(-1)^n n^3}{1+n^4}$ est somme de deux séries convergentes donc elle est convergente.

Correction de l'exercice 1.6 : On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^b}\right) &= \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{1}{n^b}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{1}{n^b}} = \frac{1-\tan\frac{1}{n^b}}{1+\tan\frac{1}{n^b}} = (1-\tan\frac{1}{n^b})(1+\tan\frac{1}{n^b})^{-1}\\ &= (1-\frac{1}{n^b}+o(\frac{1}{n^b}))(1+\frac{1}{n^b}+o(\frac{1}{n^b}))^{-1}\\ &= (1-\frac{1}{n^b}+o(\frac{1}{n^b}))(1-\frac{1}{n^b}+o(\frac{1}{n^b})) = 1-\frac{2}{n^b}+o(\frac{1}{n^b})\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^b}\right)\right]^{n^a} &= \exp(n^a\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^b}\right)) = \exp\left(n^a\ln\left[1-\frac{2}{n^b}+o(\frac{1}{n^b})\right]\right)\\ &= \exp(n^a(-\frac{2}{n^b}+o(\frac{1}{n^b})) = \exp(-2n^{a-b}+o(n^{a-b}))\end{aligned}$$

- Si $a-b=0$ alors
$$\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^b}\right)\right]^{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} \exp(-2+o(1)) \underset{n\to+\infty}{\to} \exp(-2)\neq 0$$
donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^b}\right)\right]^{n^a}$ est grossièrement divergente
- Si $a-b<0$ alors $n^{a-b}\underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et l'on a
$$\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^b}\right)\right]^{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} \exp(-2n^{a-b}+o(n^{a-b})) \underset{n\to+\infty}{\to} \exp(0)=1$$
donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^b}\right)\right]^{n^a}$ est grossièrement divergente
- Si $a-b>0$ alors $-2n^{a-b}+o(n^{a-b}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -2n^{a-b} \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$ donc $\exp(-2n^{a-b}+o(n^{a-b})) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^b}\right)\right]^{n^a} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Nous n'avons pas de divergence grossière. Ne pouvant obtenir d'équivalent simple de $\exp(-2n^{a-b}+o(n^{a-b}))$ (car
$$e^{a_n+b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{a_n} \Leftrightarrow e^{b_n}\to 1 \Leftrightarrow b_n\to 0$$
et dans notre cas $b_n=o(n^{a-b})$ qui n'a aucune raison de tendre vers 0 $(a-b>0)$. On réfléchit un peu, on se dit que $-2n^{a-b}+o(n^{a-b})$ converge vers $-\infty$ comme la puissance n^{a-b} mais conséquent, on se dit que $\exp(-2n^{a-b}+o(n^{a-b}))$ doit tendre vers 0 plus rapidement que toutes puissances de n, intéressant n'est-il pas ? Explicitons tout ceci
$$n^2\exp(-2n^{a-b}+o(n^{a-b})) = \exp(2\ln n-2n^{a-b}+o(n^{a-b}))$$
Or nous savons que toute puissance de n (d'exposant strictement positif) converge vers $+\infty$ beaucoup plus rapidement que $\ln n$ (voire que toute puissance de $\ln n$, i.e. $(\ln n)^\alpha$). Nous avons
$$2\ln n-2n^{a-b}+o(n^{a-b}) = \underbrace{-2n^{a-b}}_{\to-\infty}(1-\underbrace{\frac{\ln n}{n^{a-b}}}_{\to 0}+o(1)) \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^b}\right)\right]^{n^a} = \lim_{n\to+\infty}\exp(2\ln n-2n^{a-b}+o(n^{a-b})) = \text{"}\exp(-\infty)\text{"} = 0$$

On en déduit que $\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^b}\right)\right]^{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{n^2})$. Le terme général de la série $\sum_{n\geqslant 1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^b}\right)\right]^{n^a}$ étant négligeable devant le terme général de la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ et cette dernière étant absolument convergente, le théorème de comparaison des séries pour les o montre que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^b}\right)\right]^{n^a}$ est convergente.

Conclusion : La série $\sum_{n\geqslant 1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^b}\right)\right]^{n^a}$ converge ssi $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$

Correction de l'exercice 1.7 : Etude de la convergence absolue : puisque $a>0$, $n^a\to+\infty$ et on a l'équivalent suivant :

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n+n^a}}\right| = \frac{1}{\sqrt{(-1)^n+n^a}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n^a}} = \frac{1}{n^{a/2}}$$

Cette dernière suite étant positive, les séries $\sum_n \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n+n^a}}\right|$ et $\sum_n \frac{1}{n^{a/2}}$ sont de même nature. Cette dernière étant convergente ssi $\frac{a}{2}>1\Leftrightarrow a>2$, on en déduit que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n+n^a}}$ est absolument convergente ssi $a>2$.

Etude de la convergence lorsque $a\in]0,2]$: On effectue un développement limité

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n+n^a}} &= \frac{(-1)^n}{n^{a/2}(1+\frac{(-1)^n}{n^a})^{1/2}} = \frac{(-1)^n}{n^{a/2}}\times(1+\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^a}}_{\to 0})^{-1/2} = \frac{(-1)^n}{n^{a/2}}\times(1-\frac{(-1)^n}{n^a}+o(\frac{1}{n^a}))\\ &= \frac{(-1)^n}{n^{a/2}}-\frac{1}{n^{3a/2}}+o(\frac{1}{n^{3a/2}})\end{aligned}$$

La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^{a/2}}$ étant alternée et la valeur absolue de son terme général décroissant vers 0, on en déduit par le critère spécial des séries alternées que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^{a/2}}$ est convergente.

Puisque l'on a l'équivalent $-\frac{1}{n^{3a/2}}+o(\frac{1}{n^{3a/2}}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^{3a/2}}$ et que la suite $(-\frac{1}{n^{3a/2}})_n$ est de signe constant (ici négative), les séries $\sum_n\left[-\frac{1}{n^{3a/2}}+o(\frac{1}{n^{3a/2}})\right]$ et $\sum_n -\frac{1}{n^{3a/2}} = -\sum_n \frac{1}{n^{3a/2}}$ sont de même nature. Cette dernière série étant une série de Riemann, elle converge ssi $\frac{3a}{2}>1\Leftrightarrow a>\frac{2}{3}$. On en déduit que la série $\sum_n\left[-\frac{1}{n^{3a/2}}+o(\frac{1}{n^{3a/2}})\right]$ converge ssi $a\in]\frac{2}{3},2]$.

Par conséquent, si $a\in]0,\frac{2}{3}]$, la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n+n^a}}$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente donc elle est divergente. Si $a\in]\frac{2}{3},2]$, la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n+n^a}}$ est la somme de deux séries convergentes donc elle est convergente

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n+n^a}}$ converge ssi $a>\frac{2}{3}$ et elle converge absolument ssi $a>2$.