1 Exercices

Exercice 1.1 1. Etude de la suite de fonctions (f_n) définie par : $f_n : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto nx\exp(-nx^2) \end{array} \right.$ (convergence simple, uniforme).

2. Etude de la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$.

3. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

Exercice 1.2 Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$:$f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n).
2. Etudier la convergence uniforme de la suite (f_n).
3. Calculer $\int\limits_0^1 f(x)\ dx$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\ dx$. Conclusion ?

Exercice 1.3 Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^\times$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}$.

1. Etudier la convergence simple et uniforme de f_n.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement.
3. On définit $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Etudier la continuité de s sur $\mathbb{R}^\times$.
4. Si $\alpha > 1$, montrer que s est continue sur $\mathbb{R}$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Pour la convergence simple, se rappeler que $\lim\limits_{X\to\pm\infty} X^\alpha \exp(\beta X) = \lim\limits_{X\to\pm} \exp(\beta X)$.
Pour la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, pour n fixé, dresser le tableau de variations de la fonction $f_n - f$, où f est la limite simple de (f_n). En déduire la valeur de $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ puis la limite lorsque $n \to +\infty$.
Ensuite fixer un réel $a > 0$ et calculer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}\backslash[-a,a]} |f_n(x) - f(x)|$ (on remarquera que $-a < \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ et $a > \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ pour n assez grand). En déduire la convergence uniforme sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$.
2. A l'aide des résultats obtenus à la question 1) montrer que l'on a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$, ni sur $\mathbb{R}^\times$ et montrer que l'on a convergence normale sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$, $a > 0$.
Montrer ensuite la continuité de $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$ puis sur $\mathbb{R}^\times$.
3. Remarquer pour commencer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx\exp(-nx^2) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(\exp(-nx^2)\right)$$
Appliquer ensuite le théorème de dérivation des sommes de séries de fonctions sur l'ensemble $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$. En déduire une égalité remarquable sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$ puis sur $\mathbb{R}^\times$. Pour finir, ne pas oublier que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \cdots$ sous certaines conditions (revoir son cours le cas échéant)

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. L'équivalent est ton ami (attention, x est fixé, n varie et on ne divise jamais par 0)
2. Pour la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, pour n fixé, dresser le tableau de variations de la fonction $f_n - f$, où f est la limite simple de (f_n). En déduire la valeur de $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ puis la limite lorsque $n \to +\infty$.
Ensuite fixer un réel $a > 0$ et calculer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}\backslash[-a,a]} |f_n(x) - f(x)|$ (on remarquera que $-a < \dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}$ et $a > \dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}$ pour n assez grand). En déduire la convergence uniforme sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$.
3. Le calcul de $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$ utilise $\dfrac{u'}{u}$. Procéder par l'absurde, utiliser le théorème de permutation limite intégrale sur un segment.

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Pour la convergence simple, l'équivalent est ton ami (attention, x est fixé, n varie et on ne divise jamais par 0).
Pour la convergence uniforme, pour n fixé, dresser le tableau de variations de la fonction $f_n - f$, où f est la limite simple de (f_n). En déduire la valeur de $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ puis la limite lorsque $n \to +\infty$.
2. L'équivalent est plus que jamais ton ami (attention, x est fixé, n varie et on ne divise jamais par 0). Un petit tour dans le cours consacré à l'énoncé précis du critère d'équivalence pour les séries n'est pas un luxe.
3. Vérifier rapidement que l'on a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$ en général ($\alpha > 0$ seulement).
Montrer que l'on a convergence normale sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$, $a > 0$.
Montrer ensuite la continuité de $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$ (revoir son cours sur la continuité de la somme d'une série) puis sur $\mathbb{R}^\times$
4. Vérifier que l'on a convergence normale sur $\mathbb{R}$ pour en déduire le résultat souhaité

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. Etude de la convergence simple : On fixe x et n varie.
pour $x \neq, 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} nx\exp(-nx^2) \underset{T=nx^2}{=} \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{T}{x}\exp(-T) = \frac{1}{x}\lim\limits_{T\to+\infty} T\exp(-T) = 0$
Pour $x = 0$,. $\lim\limits_{n\to+\infty} nx\exp(-nx^2) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.
Par conséquent, la suite f_n converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Etude de la convergence uniforme : Pour n fixé, on étudie les variations de $x \mapsto f_n(x) - 0 = f_n(x)$ sur $\mathbb{R}$ pour obtenir une majoration effective de $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0|$.

$$(f_n(x) - 0)' = f_n'(x) = n\left(1 - 2nx^2\right)\exp(-nx^2) \text{ et } f_n(x) \text{ est du signe de } 1 - 2nx^2$$

Puisque f_n est impaire, que $f_n(\frac{1}{\sqrt{2n}}) = \sqrt{\frac{n}{2}}\exp(-\frac{1}{2})$ et que

$$\lim_{x\to+\infty}(f_n(x) - 0) = \lim_{x\to+\infty} nx\exp(-nx^2) \underset{T=nx^2}{=} \lim_{T\to+\infty} \sqrt{n}T\exp(-T) = 0 \ (n \text{ est fixé})$$

on en déduit le tableau de variations de $(f_n - 0)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$+\infty$
$1-2nx^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(f_n-0)'$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n - 0$	0	$\searrow$	$-\sqrt{\frac{n}{2}}\exp(-\frac{1}{2})$	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{n}{2}}\exp(-\frac{1}{2})$	$\searrow$	0

ce qui montre que

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sqrt{\frac{n}{2}}\exp(-\frac{1}{2}) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Néanmoins, le tableau de variations de f_n montre que l'extremum génant est atteint en $-\frac{1}{\sqrt{2n}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ qui tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrons que l'on a convergence uniforme sur tout ensemble de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0 (en son intérieur ou sur son bord, autrement dit que 0 ne soit pas dans l'adhérence de l'ensemble), c'est-à-dire montrons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout ensemble du type $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ avec $a > 0$ (en clair $\mathbb{R}$ privé d'un segment $[-a, a]$ afin de ne pas avoir 0 comme point adhérent).
Fixons $a > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{2n}} = 0$, on est assuré de l'existence d'un entier $N(a)$ (dépendant à priori de a) tel que pour tout $n \geqslant N(a)$, on ait $-a < -\frac{1}{\sqrt{2n}}$ et $a > \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Dans ce cas, le tableau de variations précédent et l'imparité de $f_n - 0$ montre que

$\forall n \geqslant N(a)$,

x	$-\infty$		$-a$		$-\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$\frac{1}{\sqrt{2n}}$		a		$+\infty$
$1-2nx^2$		$-$			0	$+$	0			$-$	
$(f_n-0)'$		$-$			0	$+$	0			$-$	
$f_n - 0$	0	$\searrow$	$-f_n(a)$	$\searrow$	$-\sqrt{\frac{n}{2}}\exp(-\frac{1}{2})$	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{n}{2}}\exp(-\frac{1}{2})$	$\searrow$	$f_n(a)$	$\searrow$	0

On en déduit aisément que

$$\forall n \geqslant N(a), \quad \sup_{x\in\mathbb{R}\setminus[-a,a]} |f_n(x) - 0| = f_n(a)$$

et comme a est fixé, la convergence simple de f_n sur $\mathbb{R}$ montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}\backslash[-a,a]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to+\infty} f_n(a) = 0,$$

ce qui implique que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers 0 sur tout ensemble de la forme $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$.
Par contre, on a pas convergence sur $\bigcup\limits_{a>0} \mathbb{R}\backslash[-a,a] = \mathbb{R}^\times$ car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^\times} |f_n(x) - 0| = f_n(\frac{1}{\sqrt{2n}}) = \sqrt{\frac{n}{2}} \exp(-\frac{1}{2}) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

Remarque : ici nous avons constater que l'on a pas convergence uniforme sur l'intervalle tout entier de convergence simple (en l'occurence $\mathbb{R}$ dans le présent cas). Pour deviner les ensembles éventuels de convergence uniforme, il faut regarder les limites L lorsque n tend vers $+\infty$ des points où se réalise la valeur extrémale de $|f_n(x) - f(x)|$. Alors on a, en général, convergence uniforme sur tout ensemble ne contenant pas dans son adhérence (i.e. à l'intérieur ou sur ses bords, même s'ils sont exclus) les limites L. On procède comme dans notre cas en disant que pour n assez grand, on dispose du tableau exact de monotonie de la fonction $f_n - f$ (les bornes de l'ensemble se situant de part et d'autres des limites L), ce qui fournit le calcul exacte de la valeur maximale de $|f_n(x) - f(x)|$ sur l'ensemble considéré et détermine alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup |f_n(x) - f(x)|$.

2. Etude de la convergence normale: D'après l'étude précédente, on a $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sqrt{\frac{n}{2}} \exp(-\frac{1}{2}) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ donc la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$ diverge grossièrement donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$ tout entier
De même, on n'a pas convergence normale sur $\mathbb{R}^\times$.
Soit $a > 0$, alors il existe un entier $N(a)$ tel que

$$\forall n \geqslant N(a), \quad \sup_{x\in\mathbb{R}\backslash[-a,a]} |f_n(x)| = f_n(a) = na\exp(-na^2)$$

Montrons que la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(a)$ est convergente. Pour cela, on applique une règle de comparaisons.
Puisque $e^{-X} \underset{X\to+\infty}{=} o(\frac{1}{X^3})$ et que $na^2 \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ (car $a > 0$ donc $a \neq 0$), on en déduit que

$$\exp(-na^2) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{(na^2)^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right) \Rightarrow na\exp(-na^2) = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ étant une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$) et positive, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} na\exp(-na^2) = \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(a)$ est convergente, ce qui implique que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}\backslash[-a,a]} |f_n(x)|$ converge. On vient donc de démontrer la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur tout ensemble de la forme $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$ (ce qui, rappelons le, implique la convergence uniforme sur cet ensemble).
Pour tout entier naturel n, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$ et la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$ donc le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions montre que la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$. Le réel a étant quelconque parmi les réels strictement positifs, on en déduit que la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\bigcup\limits_{a>0} (\mathbb{R}\backslash[-a,a]) = \mathbb{R}^\times$.

3. Puisque $\frac{d}{dx}(\exp(-nx^2)) = -2nx\exp(-nx^2)$, on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} nx\exp(-nx^2) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}(\exp(-nx^2))$$

Si l'on pouvait permuter les symboles sommes et dérivations, on serait amener à calculer une somme de suites géométriques $(\exp(-nx^2)) = (\exp(-x^2))^n)$, ce que l'on doit savoir faire puis dériver le résultat. Bien entendu, le théorème a utilisé est le théorème de permutation somme dérivée. Il nécessite néanmoins la convergence uniforme sur un ensemble donné(en général, cela signifie convergence normale si la série n'est pas alternée, ce qui est notre cas) de

la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}(\exp(-nx^2)) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} nx\exp(-nx^2)$ et nous savons que nous ne disposons de convergence normale que sur des ensembles de la forme $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$.
Fixons $a > 0$.

- Pour tout entier n, la fonction $x \mapsto \exp(-nx^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$.
- La série $\sum_{n\geqslant 0} \exp(-nx^2)$ converge normalement sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$.
  Preuve :
  $$\begin{aligned}\forall x \quad &\in \quad \mathbb{R}\backslash[-a,a], \quad x^2 \geqslant a^2 \Rightarrow nx^2 \geqslant na^2 \Rightarrow \left|\exp(-nx^2)\right| \leqslant \exp(-na^2) \text{ (majoration "brutale")}\\ &\Rightarrow \quad 0 \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}\backslash[-a,a]} \left|\exp(-nx^2)\right| \leqslant \exp(-na^2) = (\exp(-a^2))^n\end{aligned}$$
  Puisque $\exp(-a^2) \in]-1,1[$ $(a > 0)$ la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} (\exp(-a^2))^n$ est convergente et l'inégalité précédente montre que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \sup_{x\in\mathbb{R}\backslash[-a,a]} \left|\exp(-nx^2)\right|$, ce qui implique la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \exp(-nx^2)$ sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$
- La série $\sum_{n\geqslant 0} nx\exp(-nx^2)$ converge normalement sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$ (cela a été montré à la question 2)

Le théorème de permutation somme dérivée montre alors que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-nx^2)$ est C^1 sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$ et que sa dérivée est

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash[-a,a], \quad \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-nx^2)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(\exp(-nx^2)\right) = -2\sum_{n=0}^{+\infty} nx\exp(-nx^2)$$

Puisque a est un réel strictement positif quelconque et tout réel x non nul appartient nécessairement à un ensemble du type $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$ ($\bigcup_{a>0} (\mathbb{R}\backslash[-a,a]) = \mathbb{R}^\times$) on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-nx^2)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(\exp(-nx^2)\right) = -2\sum_{n=0}^{+\infty} nx\exp(-nx^2)$$

En utilisant que $\forall x \in \mathbb{R}^\times$, $\exp(-x^2) \in]-1,1[$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ si $q \in]-1,1[$, on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-nx^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\exp(-x^2)\right)^n = \frac{1}{1-\exp(-x^2)}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad -2\sum_{n=0}^{+\infty} nx\exp(-nx^2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-\exp(-x^2)}\right) = -2x\frac{\exp(-x^2)}{\left(1-\exp(-x^2)\right)^2}$$

ce qui nous donne l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nx\exp(-nx^2) = x\frac{\exp(-x^2)}{\left(1-\exp(-x^2)\right)^2}$$

Pour finir, quand $x = 0$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} nx\exp(-nx^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx\exp(-nx^2) = \begin{cases} x\dfrac{\exp(-x^2)}{\left(1-\exp(-x^2)\right)^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}^\times \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Remarque : Montrons que cela implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} nx\exp(-nx^2)$ *n'est pas uniformément convergente sur R (donc elle ne peut être normalement convergente sur $\mathbb{R}$, ce qui redémontrerait le résultat de la question 2).*
Procédons par l'absurde. Supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0} nx\exp(-nx^2)$ *converge uniformément convergente sur R tout*

entier. Le fait que chaque fonction $x \mapsto nx\exp(-nx^2)$ soit continue sur $\mathbb{R}$ implique, par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonction, la continuité sur R tout entier de la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} nx\exp(-nx^2) = \begin{cases} x\dfrac{\exp(-x^2)}{(1-\exp(-x^2))^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}^\times \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Or la fonction $x \mapsto \begin{cases} x\dfrac{\exp(-x^2)}{(1-\exp(-x^2))^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}^\times \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ *n'est pas continue en 0 (car*

$$x\frac{\exp(-x^2)}{(1-\exp(-x^2))^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$$

et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ n'admet pas de limite en 0 (donc elle ne peut tendre vers 0).
Conclusion : La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} nx\exp(-nx^2)$ n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$

Correction de l'exercice 1.2 : Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

1. Etude de la convergence simple. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Si $x \neq 0$,

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^n x}{n2^n x^2} = \frac{1}{nx} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

   Conclusion : la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers 0

2. Etudions les variations de $f_n - 0$ pour n fixé.

$$(f_n(x)-0)' = \left(\frac{2^n x}{1+n2^n x^2}\right)' = 2^n \frac{1-nx^2 2^n}{(1+n2^n x^2)^2}$$

   Comme $f_n - 0$ est impaire et que $f_n(\dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}) = \dfrac{\sqrt{2^n}}{4\sqrt{n}}$, on en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}$		$+\infty$
$1-nx^2 2^n$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(f_n-0)'$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n - 0$	0	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{2^n}}{4\sqrt{n}}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2^n}}{4\sqrt{n}}$	$\searrow$	0

   Par conséquent, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0|) = \dfrac{\sqrt{2^n}}{4\sqrt{n}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2^n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, on en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme dans l'exercice 1.1, puisque

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n2^n}} = 0$$

   montrons que l'on a convergence uniforme sur tout ensemble de la forme $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$, avec $a > 0$.
   Fixons $a > 0$. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n2^n}} = 0,$$

   on est assuré de l'existence d'un entier $N(a)$ (dépendant à priori de a) tel que pour tout $n \geqslant N(a)$, on ait $-a < -\dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}$

et $a > \dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}$. Dans ce cas, le tableau de variations précédent et l'imparité de $f_n - 0$ montre que

$\forall n \geqslant N(a),$

x	$-\infty$		$-a$		$-\dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}$		a		$+\infty$
$1 - nx^2 2^n$		$-$			0	$+$	0			$-$	
$(f_n - 0)'$		$-$			0	$+$	0			$-$	
$f_n - 0$	0	$\searrow$	$-f_n(a)$	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{2^n}}{4\sqrt{n}}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2^n}}{4\sqrt{n}}$	$\searrow$	$f_n(a)$	$\searrow$	0

On en déduit aisément que

$$\forall n \geqslant N(a), \qquad \sup_{x \in \mathbb{R} \backslash [-a,a]} |f_n(x) - 0| = f_n(a)$$

et comme a est fixé, la convergence simple de f_n sur $\mathbb{R}$ montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(a) = 0$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R} \backslash [-a,a]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n \to +\infty} f_n(a) = 0,$$

ce qui implique que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément vers 0 sur tout ensemble de la forme $\mathbb{R} \backslash [-a, a]$.
Par contre, on a pas convergence sur $\bigcup\limits_{a > 0} \mathbb{R} \backslash [-a, a] = \mathbb{R}^\times$ car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^\times} |f_n(x) - 0| = f_n(\frac{1}{\sqrt{n2^n}}) = \frac{\sqrt{2^n}}{4\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$$

3. $\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 0 dx = 0$. Pour la seconde intégrale, on remarque une formule du type $\dfrac{u'}{u}$:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} dx = \left[\frac{\ln(1 + n2^n x^2)}{2n} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\ln(1 + n2^n)}{2n}.$$

Le terme dominant de le ln est $n2^n$ donc on le factorise, ce qui nous donne

$$\frac{\ln(1 + n2^n)}{2n} = \frac{\ln(n2^n) + \ln(1 + \frac{1}{n2^n})}{2n} = \frac{\overbrace{\ln n}^{=o(n)} + n \ln 2 + \overbrace{\ln(1 + \frac{1}{n2^n})}^{\to 0}}{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n \ln 2}{2n} = \frac{\ln 2}{2}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \dfrac{\ln 2}{2}$. On retrouve ainsi que la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ (donc sur $\mathbb{R}$). En effet, si la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$, puisque chaque fonction $(f_n)_{n \geqslant 0}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, le théorème de permutation limite intégrale sur les segments montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(x) dx \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} = 0$$

ce qui est absurde.
Remarquons pour finir, que la convergence non uniforme sur $[0, 1]$ *provient du fait que* 0 *appartient à l'adhérence de l'intervalle* $[0, 1]$ *(il appartient même ici à l'intervalle lui-même)*

Correction de l'exercice 1.3 : Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^\times$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}$.

1. Etude de la convergence simple : si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$. Si $x \neq 0$ alors

$$f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{x}{n^\alpha \times nx^2} = \frac{1}{n^{1+\alpha} x} \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Conclusion : la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$.
Etude de la convergence uniforme : Etudions les variations de la fonciton $(f_n - 0)$

$$(f_n(x) - 0)' = \left(\frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}\right)' = \frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$$

Comme $f_n - 0$ est impaire et que $f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{4n^{\alpha+1/2}}$, on en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{n}}$		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$1-nx^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(f_n-0)'$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n - 0$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4n^{\alpha+1/2}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4n^{\alpha+1/2}}$	$\searrow$	0

Par conséquent, pour tout entier non nul n, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{4n^{\alpha+1/2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ (car } \alpha + 1/2 \geqslant 1/2 > 0),$$

ce qui montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} 0$ converge.

   Si $x \neq 0$ alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{1+\alpha}x}$. On invoque alors le théorème de comparaison pour les séries à termes de signe constant (par rapport à n et non x !)

   - La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ est convergente puisque $\alpha + 1 > 1$ ($\alpha > 0$)
   - La suite $\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}x}\right)_{n\geqslant 1}$ est de signe constant par rapport à n (égal au signe de x)
   - $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{1+\alpha}x}$

   Toutes les hypothèses du théorème de comparaison pour les séries à termes de signe constant (par rapport à n et non x !) sont réunis donc on peut affirmer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. On nous propose clairement d'appliquer le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions. Puisque chaque terme de la série est continue sur $\mathbb{R}$, nous allons étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}^\times$ (ou sur des sous-ensembles)

   Nous avons montrer dans la question 1) que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{4n^{\alpha+1/2}}$ mais la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^{\alpha+1/2}}$ n'est pas nécessairement convergente (car α est seulement supposer > 0 donc on n'est pas assuré que $\alpha + \frac{1}{2} > 1$).
   Il est également inutile d'espérer avoir convergence normale sur $\mathbb{R}^\times$ puisque

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^\times} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{4n^{\alpha+1/2}}$$

   Le tableau de variations de la question 1) montre que le problème provient des points $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui tendent vers 0 donc nous allons considérer des ensembles dont 0 n'est pas un point adhérent (0 n'est pas à l'intérieur de l'ensemble, ni sur son bord) autrement dit sur des ensembles de la forme $\mathbb{R}\backslash[-a, a]$ avec $a > 0$.
   Fixons un réel $a > 0$. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

on est assuré de l'existence d'un entier $N(a)$ (dépendant à priori de a) tel que pour tout $n \geqslant N(a)$, on ait $-a < -\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $a > \frac{1}{\sqrt{n}}$. Dans ce cas, le tableau de variations précédent et l'imparité de $f_n - 0$ montre que

$\forall n \geqslant N(a),$

x	$-\infty$		$-a$		$-\frac{1}{\sqrt{n}}$		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		a		$+\infty$
$1-nx^2$		$-$			0	$+$	0			$-$	
$f_n'(x)$		$-$			0	$+$	0			$-$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$-f_n(a)$	$\searrow$	$-\frac{1}{4n^{\alpha+1/2}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4n^{\alpha+1/2}}$	$\searrow$	$f_n(a)$	$\searrow$	0

On en déduit aisément que

$$\forall n \geqslant N(a), \quad \sup_{x \in \mathbb{R}\backslash[-a,a]} |f_n(x)| = f_n(a)$$

Nous avons établi dans la question 2) que la série $\sum_{n \geqslant 1} f_n(a)$ converge donc la série $\sum_{n \geqslant N(a)} \sup_{x \in \mathbb{R}\backslash[-a,a]} |f_n(x)|$ converge, ce qui implique que la série $\sum_{n \geqslant 1} \sup_{x \in \mathbb{R}\backslash[-a,a]} |f_n(x)|$ converge.

Par conséquent, la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$. Puisque, pour chaque entier n, chaque fonction $x \mapsto f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$, le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions montre que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash[-a,a]$. Le réel a étant quelconque parmi les réels strictement positifs, on en déduit que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\bigcup_{a>0} (\mathbb{R}\backslash[-a,a]) = \mathbb{R}^\times$.

4. Nous avons vu à la question 1) que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{4n^{\alpha+1/2}}$. Puisque $\alpha > \frac{1}{2}$, on $\alpha + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ donc la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge donc la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$ est convergente ce qui implique la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. En outre, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions continues montre que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier