1 Exercices

Exercice 1.1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 5 \\ 14 & -11 & 10 \\ 7 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $\ker(A - I_3)$ et $\mathrm{Im}(A - I_3)$
2. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.2 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $\ker(A - I_4)$, $\ker(A - I_4)^2$, $\ker(A + I_4)$ et $\ker(A + I_4)^2$.
2. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. Calculer A^n lorsque $n \in \mathbb{N}$

Exercice 1.3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $\ker(A - I_3)$, $\quad \ker(A - 2I_3)$, $\quad \ker(A - 2I_3)^2$
2. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Pour le ker, c'est facile, pour l'image, on se rappelle que $y \in \text{Im}(f)$ ssi il existe x ... tel que $y = f(x)$, cette dernière équation donne un système que l'on réduit par Gauss en un système triangulaire, ce qui fournit les équations que doit satisfaire y (les célèbres équations auxiliaires)
2. Si a est l'endomorphisme associé à A, cela revient à trouver 3 vecteurs f_1, f_2, f_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$ et tels que
$$a(f_1) = f_1 + f_2 \quad a(f_2) = f_2 \quad a(f_3) = f_3$$
(en effet, deux matrices sont semblables ssi elles sont les matrices d'un même endomorphisme mais dans des bases distinctes) Pour les deux derniers, cela revient à choisir des vecteurs libres quelconques dans $\ker(A - \text{Id})$. La première équation exige néanmoins que $f_2 \in \text{Im}(A - \text{Id})$. Donc, il faut caractériser $\text{Im}(A - \text{Id})$ et choisir un vecteur $f_2 \in \ker(A - \text{Id}) \cap \text{Im}(A - \text{Id})$ (on aura guère le choix car cet espace est de dimension 1) ce choix étant fait, on choisit un vecteur f_3 de $\ker(A - \text{Id})$ non colinéaire à f_2 (on aura également guère le choix car $\ker(A - \text{Id})$ est de dimension 2). Ensuite, en ayant construit f_2 et f_3, on cherche un vecteur f_1 vérifiant l'égalité $a(f_1) = f_1 + f_2$ par une résolution brutale du système.

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. RAS
2. Si a est l'endomorphisme associé à A, cela revient à trouver 4 vecteurs f_1, f_2, f_3, f_4 formant une base de $\mathbb{R}^4$ et tels que
$$a(f_1) = f_1 \quad a(f_2) = f_1 + f_2 \quad a(f_3) = -f_3 \quad a(f_4) = f_3 - f_4$$
(en effet, deux matrices sont semblables ssi elles sont les matrices d'un même endomorphisme mais dans des bases distinctes) Pour la première équation et la troisième, cela revient à choisir respectivement un vecteur (non nul !) dans $\ker(A - \text{Id})$ et un vecteur dans $\ker(A + \text{Id})$.
La deuxième équation exige néanmoins que $f_1 \in \text{Im}(A - \text{Id})$. Donc, il faut caractériser $\text{Im}(A - \text{Id})$ et choisir un vecteur $f_1 \in \ker(A - \text{Id}) \cap \text{Im}(A - \text{Id})$ (on aura guère le choix car cet espace est de dimension 1). Ensuite, en ayant construit f_1, on cherche un vecteur f_2 vérifiant l'égalité $a(f_2) = f_1 + f_2$ par une résolution brutale du système.
La quatrième équation implique que $f_3 \in \text{Im}(A + \text{Id})$. Donc, il faut caractériser $\text{Im}(A + \text{Id})$ et choisir un vecteur $f_3 \in \ker(A + \text{Id}) \cap \text{Im}(A + \text{Id})$ (on aura guère le choix car cet espace est de dimension 1). Ensuite, en ayant construit f_3, on cherche un vecteur f_4 vérifiant l'égalité $a(f_4) = f_3 - f_4$ par une résolution brutale du système.
3. On écrit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sous la forme $D + N$, où D est une matrice diagonale convenable (inutile de se triturer trop les méninges) et N la matrice $B - D$. Le calcul de $(D + N)^n$ résulte de la formule du binôme pour les matrices (revoir le cours de sup pour n'oublier aucune hypothèse) et conclure à l'aide de la célèbre formule $A = PBP^{-1} \Rightarrow A^n = PB^nP^{-1}$

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. RAS
2. Si a est l'endomorphisme associé à A, cela revient à trouver 3 vecteurs f_1, f_2, f_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$ et tels que
$$a(f_1) = 2f_1 + f_2 \quad a(f_2) = 2f_2 \quad a(f_3) = -f_3$$
(en effet, deux matrices sont semblables ssi elles sont les matrices d'un même endomorphisme mais dans des bases distinctes) Pour les deux derniers, cela revient à choisir respectivement des vecteurs libres dans $\ker(A - 2\,\text{Id})$ et $\ker(A + \text{Id})$ La première équation exige néanmoins que $f_2 \in \text{Im}(A - 2\,\text{Id})$. Donc, il faut caractériser $\text{Im}(A - 2\,\text{Id})$ et choisir un vecteur $f_2 \in \ker(A - 2\,\text{Id}) \cap \text{Im}(A - 2\,\text{Id})$ (on aura guère le choix car cet espace est de dimension 1). Ce choix étant fait, on cherche un vecteur f_1 vérifiant l'égalité $a(f_1) = 2f_1 + f_2$ par une résolution brutale du système.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)