1 Exercices

Exercice 1.1 1. Expliciter un polynôme annulateur de degré 2 de $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & 0 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & 0 \end{pmatrix}$

2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. Effectuer la diagonalisation le cas échéant

Exercice 1.2 1. Diagonalisabilité de $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 5 \\ 14 & -11 & 10 \\ 7 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

2. Même question avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.3 Etudier la diagonalisabilité de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Calculer A^2 et l'exprimer comme une combinaison linéaire simple de A et I
2. Revoir le cours sur une condition suffisante de diagonalisabilité sur l'existence d'un polynôme annulateur à .....
3. Rechercher les espaces propres associée à -2 et à 1 .....

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Pensez à factoriser au mieux le polynôme caractéristique (par combinaison judicieuse de lignes ou de colonnes, faire apparaitre des lignes ou colonne de zéro, ou dans un premier temps, une ligne ou une colonne d'une même expression, puis factoriser et faire apparaitre des zéros)par apparition de facteur commun)
   On obtiendra une seule valeur propre 1 et la dimension de l'espace propre sera égale à 2.
   Pour la réduction, trigonaliser : on déterminera l'espace propre $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ puis on déterminera un vecteur e_3 de $\ker(A - \lambda I)^3 = \mathbb{R}^3$ qui vérifie $Ae_3 = e_3 + e_2$ (pour obtenir des blocs)
2. Pensez à factoriser au mieux le polynôme caractéristique (par combinaison judicieuse de lignes ou de colonnes, faire apparaitre des lignes ou colonne de zéro, ou dans un premier temps, une ligne ou une colonne d'une même expression, puis factoriser et faire apparaitre des zéros)par apparition de facteur commun)
   On obtiendra deux valeurs propres 1 et 7 et la matrice sera diagonalisable.

Indication pour l'exercice 1.3 : Pensez à factoriser au mieux le polynôme caractéristique (par combinaison judicieuse de lignes ou de colonnes, faire apparaitre des lignes ou colonne de zéro, ou dans un premier temps, une ligne ou une colonne d'une même expression, puis factoriser et faire apparaitre des zéros)par apparition de facteur commun)
On obtiendra deux valeurs propres -1 et 1 et la matrice ne sera pas diagonalisable.
Pour la réduction, il faut trigonaliser : pour chaque valeur propre λ, on déterminera l'espace propre $E_\lambda = \mathrm{Vect}(e_\lambda)$ puis on déterminera un vecteur f_λ de $\ker(A - \lambda I)^2$ qui vérifie $Af_\lambda = \lambda f_\lambda + e_\lambda$ (pour obtenir des blocs)

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)