1 Exercices

Exercice 1.1 On pose $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$.

1. Donner le domaine $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}_f$.
3. Justifier que f est C^2 sur $]0, +\infty[$ et donner $f''(x)$. En déduire $f(x)$.

Exercice 1.2 On pose $F(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$.

1. Montrer que F est bien définie pour $x > 0$.
2. Montrer que f est dérivable et calculer F'.
3. Calculer F.

Exercice 1.3 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int\limits_0^{\pi} \ln(1 + x\cos t) dt$$

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Justifier que f est dérivable sur l'intérieur de son domaine de définition et donner $f'(x)$.
3. En déduire que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \int\limits_0^{\pi} \ln(1 + x\cos t) dt = \pi \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{2}\right)$$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. La fonction sous le signe intégrale se prolonge par continuité (par rapport à t ! car on intègre par rapport à ... t). En $+\infty$ (par rapport à t, une majoration simple fournit la convergence.

2. Pour la continuité, utiliser Taylor sur cos pour obtenir une majoration simple de $t \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}$ et appliquer les théorèmes sur les intégrales à paramètres (Lebesgue) sur des segments.
Pour dérivabilité, idem mais en majorant $|\sin y|$ par $|y|$ (pourquoi cette inégalité est valide ?)

3. Refaire Lebesgue sur l'intégrale à paramètre $f'(x)$. La fonction $f''(x)$ est une belle intégrale que l'on calcule par deux méthodes :
soit en remarquant que $(\sin at)e^{-t} = \mathrm{Im}(e^{-t+iat})$ et en primitivant directement
soit en faisant deux intégrations par partie successives qui permettent d'écrire $f''(x)$ en fonction de x et de $f''(x)$ et le calcul de $f''(x)$ en résulte.
(Je conseille le lecteur de faire les deux méthodes)
L'expression de $f''(x)$ étant explicite (i.e. ne dépendant pas du symbole $\int$), par une double primitivation, obtenir l'expression de f à un polynôme du premier degré près. Sa détermination provient du calcul direct de $f(0)$ et de $f'(0)$

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Justifier le prolongement en 0 (par rapport à t puisque l'on intègre par rapport à t) et en $+\infty$, une majoration par le facteur tendant le plus vite vers 0 résoud le problème.

2. Utiliser les théorèmes sur les théorèmes sur les intégrales à paramètre sur des intervalles de la forme $[A, +\infty[$

3. Pour calculer l'intégrale $F'(x)$, il y a deux méthodes :
soit en remarquant que $(\sin t)e^{-at} = \mathrm{Im}(e^{-at+it})$ et en primitivant directement
soit en faisant deux intégrations par partie successives qui permettent d'écrire $F'(x)$ en fonction de x et de $F'(x)$ et le calcul de $F'(x)$ en résulte.
L'expression de $F'(x)$ étant explicite (i.e. ne dépendant pas du symbole $\int$), par une simple primitivation, obtenir l'expression de f à une constante additive près. Sa détermination provient du calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ (que l'on obtient par le théorème de permutation limite-intégrale de Lebesgue)

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Lorsque $|x| < 1$, il n'y a pas de problème, lorsque $|x| > 1$, le logarithme n'est pas défini sur des intervalles entiers, pour $|x| = 1$, il y a un problème en 0 ou π. Un équivalent en ce point permet de conclure (en π, effectuer le changement de variable $u = \pi - t$ pour l'obtention de l'équivalent).
On n'oublie pas d'étudier l'intégrabilité de $\ln t$ en 0 (soit par comparaison avec une fonction puissance convenable, soit par calcul explicite de l'intégrale sur $[\varepsilon, 1]$ puis en faisant tendre ε vers 0)

2. Utiliser les théorèmes sur les intégrales à paramètre sur $[-a, a]$ avec $0 < a < 1$. Pour les majorations, encadrement uniquement x, les fonctions indépendantes de x apparaissent naturellement

3. L'intégrale $f'(x)$ est une belle fraction rationnelle en $\cos t, \sin t$. On revoit son cours de sup pour optimer le changement de variable à effectuer. Après quelques calculs, obtenir l'expression explicite de $f'(x)$ (i.e. sans symbole $\int$). Deux techniques sont alors possibles pour conclure.
Soit calculer $\dfrac{d}{dx}\pi \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$ et vérifier que cette expression est identique à $f'(x)$ (explicite) donc $\pi \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$ et $f(x)$ diffère à une constante additive près que l'on détermine en évaluant en $x = 0$
Soit on primitive directement $f'(x)$
(Je conseille au lecteur d'effectuer les deux méthodes)

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)