# 1 Exercices

**Exercice 1.1** On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ qui est défini par

$$f(x,y,z) = (8x - 6y + 5z, 14x - 11y + 10z, 7x - 6y + 6z)$$

1. Donner la matrice $A$ de $f$ dans la base canonique
2. Déterminer une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$.
3. Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ sont en somme directe.
4. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$, montrer que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$
5. En déduire $A^n$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 1.2** Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A-t-on l'égalité $\mathbb{R}^4 = \ker(u - I) \oplus \ker(u + I)$ ?
2. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Ecrire la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$
4. Déterminer toutes les matrices commutant avec $A$ (i.e. toutes les matrices $M$ telles que $AM = MA$)

**Exercice 1.3** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (x + 6y + 3z, 3x + 4y + 3z, 3x + 6y + z)$

1. Déterminer la matrice $A$ de $f$ dans la base canonique.
2. Montrer que $\ker(f + 2\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f - 10\,\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $mat(f, \mathcal{B}) = \mathrm{diag}(-2, -2, 10)$
4. Calculer $f^n(x,y,z)$ en fonction de $n, x, y, z$.

## 2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

# 3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)