

1 Exercices

Exercice 1.1 1. Soit $f : (x, y) \mapsto (x + 2y, x - 3y)$

- Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .
- L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Donner son image.

2. Soit $f : P \mapsto (X + 1)P'(X) - 2P(X)$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
- Est-ce un isomorphisme ?
- Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3 + X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- Donner la matrice de f dans la base \mathcal{B} puis dans la base canonique.

Exercice 1.2 1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1, X + 1, (X + 1)^2, (X + 1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

2. On considère l'application $f : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (X + 1)P'(X) + P(X)$

- L'application f est-elle linéaire ? bijective ?
- Donner la matrice A de f dans la base \mathcal{B} .
- Donner la matrice B de f dans la base canonique.
- Quel est la relation liant A et B ?
- Calculer B^n lorsque $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.3 1. Montrer que la famille

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est une base de \mathbb{R}^4 .

2. On considère l'application linéaire $f : (x, y, z, t) \mapsto (y + 2t, -3x + 4z, y + 3t, -x + z)$

- Est-elle surjective ?
- Ecrire la matrice A de f dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) .
- Ecrire la matrice B de f dans la base canonique.
- Quelle est la relation existant entre A et B ?

3. Calculer B^n lorsque $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.4 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 5 \\ 14 & -11 & 10 \\ 7 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $\ker(f)$ et $\ker(f - \text{Id})$. Qu'en déduit-on ?

2. Montrer que la famille $f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ est une base.

3. Calculer la matrice B de f dans cette nouvelle base.

4. Calculer A^n lorsque $n \in \mathbb{N}$.

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)