1 Exercices

Exercice 1.1 Convergence et calcul de $\int_0^1 \ln t dt$.

Exercice 1.2 Soit $a, b \in]0, 2\pi[$.

1. Justifier que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{k} = i \int_a^b \frac{e^{it}}{1-e^{it}} dt$.
2. Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(ka)}{k}$ lorsque $a \in]0, \pi[$.

Exercice 1.3 Soit a un réel appartenant à $[0, 1]$. Etudier la suite $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(a - u_n^2)$ avec $u_0 = 0$.

Exercice 1.4 Jusitifier la validité de l'égalité suivante : $\int_0^1 \frac{t^2 \ln t}{t^2 - 1} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^3}$.

Exercice 1.5 Soit $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ et $J(\rho) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\rho\cos t + \rho^2) dt$.

1. Montrer que $J(\rho)$ est bien définie.
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{\pi}{n} \ln \prod_{k=1}^{n} (1 - 2\rho\cos\frac{k\pi}{n} + \rho^2)$.
   Etudier la suite (u_n) et en donner deux interprétations possibles. En déduire $J(\rho)$.

Exercice 1.6 On considère la fonction $f : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

1. Domaine de définition, parité, continuité, dérivabilité, dérivée de f.
2. Justifier l'existence de limites à f en $+\infty$, en $-\infty$ puis en 0.

Exercice 1.7 Calculer $I(z) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}}$ à l'aide de somme de Riemann pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \neq 1$

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)