1 Exercices

Exercice 1.1 On considère $f_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P)(X) = P(X+1) - P(X)$

1. Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Est-il injectif ? surjectif ? bijectif ? Donner son noyau et son image
2. On convient que $\mathbb{R}_\infty[X]$ désigne $\mathbb{R}[X]$.
   (a) Montrer que f_∞ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$
   Est-il injectif ? surjectif ? bijectif ? Donner son noyau et son image.
   (b) Même question avec $(f_\infty)^k$ où k est un entier quelconque.

Exercice 1.2 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u^2 - u + \mathrm{Id} = 0$.

1. On suppose $n = 2$. Montrer qu'il existe un vecteur x non nul tel que $(x, u(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
2. On suppose ici $n = 4$.
   (a) Montrer que, pour tout x non nul de $\mathbb{R}^4$, la famille $(x, u(x))$ est libre.
   Soit $x \in \mathbb{R}^4$, $x \neq 0$ et $y \in \mathbb{R}^4$, $y \notin \mathrm{Vect}(x, u(x))$.
   (b) Montrer que $(x, u(x), y, u(y))$ est une base $\mathbb{R}^4$.
3. Peut-on avoir $n = 3$?
4. On suppose $n = 2k$.
   Montrer qu'il existe une famille $(e_1, .., e_k)$ telle que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), ..., e_k, u(e_k))$ soit une base de E
5. Quant est-il lorsque n est impair ?

Exercice 1.3 1. Montrer que l'application qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $f(P) = Q$ défini par :

$$Q(X) = (X-a)(P'(X)) - P'(a) - n(P(X) - P(a))$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Calculer son noyau et son image.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
   (a) Pour quelles valeurs de λ, l'équation $f(P) = \lambda P$ admet-elle des solutions ?
   (b) Pour ces valeurs, déterminer toutes ces solutions.

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)