1 Exercices

Exercice 1.1 Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 1.2 On pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

1. Calculer $\det A_n$.
2. Calculer $(A_n)^{-1}$.

Exercice 1.3 Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 1.4 On considère $D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & (a_1)^2 & \cdots & (a_1)^{n-2} & (a_1)^n \\ 1 & a_2 & (a_2)^2 & \cdots & (a_2)^{n-2} & (a_2)^n \\ \vdots & a_3 & (a_3)^2 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & (a_{n-1})^{n-2} & (a_{n-1})^n \\ 1 & a_n & (a_n)^2 & & (a_n)^{n-2} & (a_n)^n \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout polynôme P unitaire de degré n et sans terme de degré $n-1$, on a
$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & (a_1)^2 & \cdots & (a_1)^{n-2} & P(a_1) \\ 1 & a_2 & (a_2)^2 & \cdots & (a_2)^{n-2} & P(a_2) \\ \vdots & a_3 & (a_3)^2 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & (a_{n-1})^{n-2} & P(a_{n-1}) \\ 1 & a_n & (a_n)^2 & \cdots & (a_n)^{n-2} & P(a_n) \end{pmatrix}$$
2. En choisissant convenablement P, en déduire l'expression de D_n.

Exercice 1.5

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. Déterminer toutes les matrices commutant à A.
3. La matrice A possède-t-elle des racines carrées ?

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)